Formális nyelvek, 11. gyakorlat

Célja: Az automaták analízisének és szintézisének gyakorlása, automata minimalizáció

Fogalmak: Analízis és szintézis, nyelvi egyenlet és egyenletrendszer és megoldása, kiterjesztett automaták, lebontási stratégiák, epszilon-átmenetes nem-determinisztikus automata, epszilon-mentesítés, összefüggővé alakítás, állapotok ekvivalenciája, automata redukció, minimális automata

Feladatok jellege: Egyszerű nyelvi egyenlet, illetve kétváltozós egyenletrendszer megoldása (unicitás ellenőrzése), 3 állapotú automatára az egyenletrendszer felírása és megoldása. 3-4 műveletet tartalmazó reguláris kifejezéshez a kiterjesztett automata alapján epszilon-átmenetes VNDA készítése, majd abból VNDA előállítása. Konkrét VDA összefüggővé alakítása és redukálása.

2005/06 II. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$S \rightarrow acA \mid bB \mid \varepsilon$ $\qquad B \rightarrow S \mid abB \mid a$

$A \rightarrow B \mid b \mid C$ $\qquad C \rightarrow acbC \mid B$

Megoldás: 3NF

$$S \rightarrow aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$A \rightarrow bF \mid aK_2 \mid aF \mid aK_4 \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow aK_2 \mid aF \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$C \rightarrow aK_2 \mid aF \mid aK_4 \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$K_1 \rightarrow cA$$
$$K_2 \rightarrow bB$$
$$K_3 \rightarrow bC$$
$$K_4 \rightarrow cK_3$$
$$F \rightarrow \varepsilon$$

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$S \rightarrow acA \mid bB \mid \varepsilon$ $\qquad B \rightarrow S \mid abB \mid a$

$A \rightarrow B \mid b \mid C$ $\qquad C \rightarrow acbC \mid B$

Megoldás: NDA

	a	b	c
$\leftrightarrows S$	K_1, B	B	
$\leftarrow A$	K_1, K_2, K_4, F	B, F	
$\leftarrow B$	K_1, K_2, F	B	
$\leftarrow C$	K_1, K_2, K_4, F	B	
K_1			A
K_2		B	
K_3		C	
K_3			K_3
$\leftarrow F$			

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$S \rightarrow acA \mid bB \mid \varepsilon$ $\qquad B \rightarrow S \mid abB \mid a$

$A \rightarrow B \mid b \mid C$ $\qquad C \rightarrow acbC \mid B$

Megoldás: VDA

		a	b	c
$\leftrightarrows$	$\{S\}$	$\{K_1\}$	$\{B\}$	$\{\}$
	$\{K_1\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{A\}$
$\leftarrow$	$\{B\}$	$\{K_1, K_2, F\}$	$\{B\}$	$\{\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{A\}$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{B, F\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{K_1, K_2, F\}$	$\{\}$	$\{B\}$	$\{A\}$
$\leftarrow$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{\}$	$\{B\}$	$\{A, K_3\}$
$\leftarrow$	$\{B, F\}$	$\{K_1, K_2, F\}$	$\{B\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{A, K_3\}$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{B, C, F\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{B, C, F\}$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{B\}$	$\{\}$

Házi feladatok megoldása

2. feladat

Határozzuk meg a palindromák nyelvének ($L = \{u \in T^* \mid u = u^{-1}\}$) maradéknyelveit! ($T$ tetszőleges.)

Megoldás:
Legyen L a palindromák nyelve.

Tetszőleges $u \in T^*$-ra $L_u = X_u \cup Y_u$, ahol
$X_u = \{v \in T^* \mid v = wu^{-1}, w \in L\}$,
$Y_u = \{v \in T^* \mid u = v^{-1}w, w \in L\}$.
Legyen ugyanis $v \in L_u$.
Ha $\ell(v) \geq \ell(u)$, akkor mivel $uv \in L$, a palindroma tulajdonság miatt $v \in X_u$.
Ha $\ell(v) < \ell(u)$, akkor mivel $uv \in L$, a palindroma tulajdonság miatt $v \in Y_u$.

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a palindromák nyelve nem $\mathcal{L}_3$-beli a Myhill-Nerode tétel illetve a Kis Bar-Hillel lemma segítségével! ($|T| \geq 2$)

Megoldás (Myhill-Nerode): Feltehető, hogy $a, b \in T$.
$ba^\ell \in L_{a^k} \Leftrightarrow k = \ell$. Ezek tehát minden k-ra különböznek, így végtelen sok különböző maradéknyelv van.

Megoldás (Kis Bar-Hillel lemma): Indirekt módon. Legyen L a palindromák nyelve. Tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}_3$. Feltehető, hogy $a, b \in T(L)$. A Kis Bar-Hillel lemma alapján ekkor létezik $n = n(L)$.
Vegyük a következő palindrom szót: $u := a^n b a^n$, és legyen $u' = a^n$.
Mivel $l(u') \geq n$, így alkalmazhatjuk a Kis Bar-Hillel lemmát.
Ezek szerint u'-ben létezik v nemüres, beiterálható részszó. Legyen $v := a^d$, ahol $d > 0$. A lemma szerint $a^{n-d-k}(a^d)^i a^k b a^n = a^{n+(i-1)d} b a^n$ eleme a palindromák nyelvének. Ez viszont $i \neq 1$ esetén nem palindroma, így ellentmondásra jutottunk.

Nyelvi egyenletek megoldása

1. feladat:

Oldjuk meg az $a^*bX \cup bc^* = X$ egyenletet! Egyértelmű-e a megoldás?

Megoldás:

$(a^*b)^*bc^*$, egyértelmű.

Nyelvi egyenletrendszerek megoldása

2. feladat:

Oldjuk meg az

$a^*bX \cup b^*aY \cup ba = X$
$b^*aX \cup a^*bY \cup ab = Y$

egyenletrendszert! Egyértelmű-e a megoldás?

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et:

$X = (a^*b)^*(ba \cup b^*aY)$.

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$(b^*a(a^*b)^*b^*a \cup a^*b)Y \cup (b^*a(a^*b)^*ba \cup ab) = Y$, amiből

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a \cup a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ba \cup ab)$.

Hasonlóan: $X = (b^*a(a^*b)^*b^*a \cup a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ab \cup ba)$.

A megoldás egyértelmű.

Mi az elfogadott nyelv reguláris kifejezéssel?

Az elfogadott nyelv meghatározása egyenletrendszer segítségével

3. feladat: (már volt)

		a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_2	q_3
	q_1	q_4	q_2	q_4
	q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow$	q_3	q_4	q_3	q_4
	q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás:
Az egyenletrendszer:
$(X \sim q_0, Y \sim q_1, Z \sim q_2, V \sim q_3)$

$X = aY \cup bZ \cup cV$
$Y = bZ$
$Z = aX \cup cV$
$V = bV \cup \varepsilon$ $\qquad X = ?$

$V = b^*$

$X = ab(aX \cup cb^*) \cup b(aX \cup cb^*) \cup cb^*,$

$X = (aba \cup ba)X \cup (abc \cup bc \cup c)b^*,$

$X = (aba \cup ba)^*(abc \cup bc \cup c)b^*.$

Reguláris kifejezéshez minimális automata készítése

4. feladat:

Készítsünk minimális automatát az alábbi reguláris kifejezéshez!
$(a^*b)(b^*c)^* \cup a^*b^*c^*$

Megoldás: Általában könnyebb első lépésben εNDA-t csinálni:

		a	b	c	ε
$\leftrightarrows$	q_1				q_2, q_5
	q_2	q_2	q_3, q_4		
	q_3		q_3	q_4	
$\leftarrow$	q_4				q_3
$\leftarrow$	q_5	q_5			q_6
$\leftarrow$	q_6		q_6		q_7
$\leftarrow$	q_7			q_7	

Reguláris kifejezéshez minimális automata készítése

4. feladat:

Készítsünk minimális automatát az alábbi reguláris kifejezéshez!
$(a^*b)(b^*c)^* \cup a^*b^*c^*$

Megoldás: Egy $\mathcal{A}$ εNDA-ból úgy készül egy vele ekvivalens $\mathcal{A}'$ NDA, hogy legyen $\delta_{\mathcal{A}'}(a, t) = b$, ha létezik $a' \in A$, hogy $\delta_{\mathcal{A}}(a', t) = b$, és eljuthatunk $\mathcal{A}$-ban a-ból a'-be ε-átmenetekkel. (A már ismert rekurzív eljárással meghatározható azon állapotok halmaza ahova egy adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.) $\mathcal{A}'$-ben akkor lesz egy q állapot elfogadó, ha $\mathcal{A}$-ban q-ból eljuthatunk ε-átmenetekkel elfogadó állapotba.

		a	b	c
$\leftrightarrows$	q_1	q_2, q_5	q_3, q_4, q_6	q_7
	q_2	q_2	q_3, q_4	
	q_3		q_3	q_4
$\leftarrow$	q_4		q_3	q_4
$\leftarrow$	q_5	q_5	q_6	q_7
$\leftarrow$	q_6		q_6	q_7
$\leftarrow$	q_7			q_7

Reguláris kifejezéshez minimális automata készítése

4. feladat:

Készítsünk minimális automatát az alábbi reguláris kifejezéshez!
$(a^*b)(b^*c)^* \cup a^*b^*c^*$

Megoldás: A már ismert módon készítünk NDA-ból VDA-t:

		a	b	c
$\leftrightarrows$	$\{q_1\}$	$\{q_2, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_6\}$	$\{q_7\}$
$\leftarrow$	$\{q_2, q_5\}$	$\{q_2, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_6\}$	$\{q_7\}$
$\leftarrow$	$\{q_3, q_4, q_6\}$	$\{\}$	$\{q_3, q_6\}$	$\{q_4, q_7\}$
$\leftarrow$	$\{q_7\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_7\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{q_3, q_6\}$	$\{\}$	$\{q_3, q_6\}$	$\{q_4, q_7\}$
$\leftarrow$	$\{q_4, q_7\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4, q_7\}$
	$\{q_3\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$
$\leftarrow$	$\{q_4\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$

Befejezés: Házi feladat

Minimális automata elõállítása

Adott egy $L \in \mathcal{L}_3$ nyelv véges determinisztikus automatával megadva. Lehet-e takarékosabban, kevesebb állapotú, L-et elfogadó automatát megadni?

Minimális automata: minimális állapotszámú L-et elfogadó VDA.

1) Összefüggővé alakítás: Nyilván el lehet hagyni az automata által a felismerés során nem használt állapotokat.
(A legfeljebb i lépésben elérhető állapotok H_i halmaza i növelésével csak bővülhet. Így a sorozatunk véges sok lépésben stabilizálódik.)

2) Redukció: Két állapot nem megkülönböztethető a nyelvelfogadás szempontjából, ha onnét ugyanazon szavak hatására kerül az automata végállapotba. Célunk az, hogy ezeket eggyé összevonjuk úgy, hogy az elfogadott nyelv változatlan maradjon.

Redukció

Ekvivalens állapotok

A δ függvény kiterjesztése szavakra: $\delta(a,u) := b$, ha $[a,u] \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\dashv}} [b,\varepsilon]$

Az $a \in A$ állapotra vonatkozó maradék nyelv:
$L(\mathcal{A},a) := \{v \mid \delta(a,v) \in F\}$.

Legyenek $a,b \in A$ állapotok. a és b ekvivalensek, ha $L(\mathcal{A},a) = L(\mathcal{A},b)$. Jelölése: $a \sim b$.

$\sim$ ekvivalencia- és jobbkongruenciareláció és analóg módon kiterjeszthető két automata állapotai közötti relációvá.

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ automaták ($a_0^{(1)}$ és $a_0^{(2)}$ kezdőállapotokkal) ekvivalensek, (jelölésben $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$) ha $a_0^{(1)} \sim a_0^{(2)}$.

Az $\mathcal{A}$ automata $\mathcal{A}/_\sim$ faktorautomatájája ekvivalens az eredetivel, redukált (nincsenek különböző ekvivalens állapotai), továbbá izomorfia erejéig az egyetlen összefüggő, redukált $\mathcal{A}$-val ekvivalens automata.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$a \sim b \;\Leftrightarrow\; L(\mathcal{A},a) = L(\mathcal{A},b) \;\Leftrightarrow\; \forall u \in T^* : \big(\delta(a,u) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta(b,u) \in F\big)$.

Legyen $a \overset{i}{\sim} b$ (a i-ekvivalens b-vel), ha minden $u \in T^{\le i}$ esetén $\big(\delta(a,u) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta(b,u) \in F\big)$ $(i \ge 0)$.

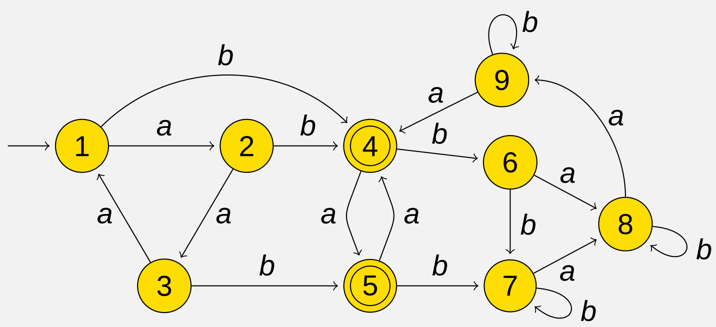
- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $a \overset{0}{\sim} b$, ha $(a \in F \Leftrightarrow b \in F)$,
- minden $a,b \in A$-ra $a \overset{i+1}{\sim} b \;\Leftrightarrow\; a \overset{i}{\sim} b \wedge (\forall t \in T : \delta(a,t) \overset{i}{\sim} \delta(b,t))$,
- $\overset{0}{\sim} \prec \overset{1}{\sim} \prec \overset{2}{\sim} \prec \cdots \prec \sim$, továbbá $a \sim b \;\Leftrightarrow\; \forall i \ge 0 : a \overset{i}{\sim} b$.
  ($\varrho_1 \prec \varrho_2$, ha minden $a,b \in A$ esetén $a \varrho_2 b \Rightarrow a \varrho_1 b$.)

$i_0 := \min\{\ell \mid \overset{\ell}{\sim} = \overset{\ell+1}{\sim}\}$.
Ekkor $i_0 \le |A| - 1$, és így $\sim = \overset{|A|-1}{\sim}$.

Redukálás

5. Feladat:

Redukáljuk a következő automatát!



Redukálás

Megoldás:

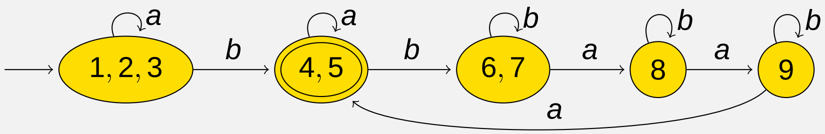
$\overset{0}{\sim}$: $\{1,2,3,6,7,8,9\}$ $\{4,5\}$

$\overset{1}{\sim}$: $\{1,2,3\}$ $\{4,5\}$ $\{6,7,8\}$ $\{9\}$

$\overset{2}{\sim}$: $\{1,2,3\}$ $\{4,5\}$ $\{6,7\}$ $\{8\}$ $\{9\}$

$\overset{3}{\sim} = \overset{2}{\sim} = \sim$

A redukált automata:



Házi feladat

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!
   $a^*b^*X \cup (ba)^*bY \cup b^* = X$
   $ba^*X \cup bY \cup a^*b^* = Y$
2. Redukáljuk a 4. feladatban kapott VDA-t!
3. Konstruáljunk (minimális) VDA-t a következő reguláris kifejezéshez!
   $(a^*b)^*c \cup ab^*c^* \cup a^*$.