Formális nyelvek, 12. gyakorlat

Célja: A környezet-független nyelvek használatával kapcsolatos alapfeladatok begyakorlása

Fogalmak: Szintaxis-fa, legbal és legjobb levezetés, nagy Bar-Hillel lemma, felülről-lefelé és alulról-felfelé elemzés, LL(k), LR(k) nyelvtanok, verem-automaták.

Feladatok jellege: Néhány szintaxis-fa egy konkrét 2. típusú nyelvtanban. Kicsit bonyolultabb nyelvtan esetében (adott szóhoz) a felülről-lefelé és az alulról-felfelé elemzés bemutatása. Konkrét nyelvtanra az LL, LR tulajdonság deteketálása, illetve a nem teljesülés kimutatása. Nagy Bar-Hillel lemma alkalmazása konkrét nyelvre. 1 verem építése a kifejezésekhez, kettő verem a dadogós nyelvhez.

2005/06 II. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!
$a^*b^*X \cup (ba)^*bY \cup b^* = X$
$ba^*X \cup bY \cup a^*b^* = Y$

Megoldás:

$X = (a^*b^*)^*(b^* \cup (ba)^*bY)$.

A második egyenletbe helyettesítve:

$(ba^*(a^*b^*)^*(ba)^*b \cup b)Y \cup (ba^*(a^*b^*)^*b^* \cup a^*b^*) = Y$, amiből

$Y = (ba^*(a^*b^*)^*(ba)^*b \cup b)^*(ba^*(a^*b^*)^*b^* \cup a^*b^*)$.

Hasonlóan:

$X = (a^*b^* \cup (ba)^*b^2b^*a^*)^*((ba)^*bb^*a^*b^* \cup b^*)$.

Házi feladatok megoldása

2. feladat

Redukáljuk az előző gyakorlat 3. feladatában kapott VDA-t!

Megoldás:

Nevezzük át az állapotokat, hogy áttekinthetőbb legyen!

			a	b	c
$\leftrightarrows$	1	$\{q_1\}$	$\{q_2, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_6\}$	$\{q_7\}$
$\leftarrow$	2	$\{q_2, q_5\}$	$\{q_2, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_6\}$	$\{q_7\}$
$\leftarrow$	3	$\{q_3, q_4, q_6\}$	$\{\}$	$\{q_3, q_6\}$	$\{q_4, q_7\}$
$\leftarrow$	4	$\{q_7\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_7\}$
	5	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	6	$\{q_3, q_6\}$	$\{\}$	$\{q_3, q_6\}$	$\{q_4, q_7\}$
$\leftarrow$	7	$\{q_4, q_7\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4, q_7\}$
	8	$\{q_3\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$
$\leftarrow$	9	$\{q_4\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$

Házi feladatok megoldása

2. feladat

Redukáljuk az előző gyakorlat 3. feladatában kapott VDA-t!

Megoldás:

		a	b	c
$\leftrightarrows$	1	2	3	4
$\leftarrow$	2	2	3	4
$\leftarrow$	3	5	6	7
$\leftarrow$	4	5	5	4
	5	5	5	5
$\leftarrow$	6	5	6	7
$\leftarrow$	7	5	8	7
	8	5	8	9
$\leftarrow$	9	5	8	9

$\overset{0}{\sim}$: $\{1,2,3,4,6,7,9\}$ $\{5,8\}$

$\overset{1}{\sim}$: $\{1,2\}$ $\{3,6\}$ $\{4,7,9\}$ $\{5\}$ $\{8\}$

$\overset{2}{\sim}$: $\{1,2\}$ $\{3,6\}$ $\{4\}$ $\{7,9\}$ $\{5\}$ $\{8\}$

$\overset{3}{\sim} = \overset{2}{\sim} = \sim$

A redukált automata:

		a	b	c
$\leftrightarrows$	12	12	36	4
$\leftarrow$	36	5	36	79
$\leftarrow$	4	5	5	4
$\leftarrow$	79	5	8	79
	5	5	5	5
	8	5	8	79

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Konstruáljunk (minimális) VDA-t a következő reguláris kifejezéshez!
$(a^*b)^*c \cup ab^*c^* \cup a^*$.

Megoldás:

εNDA

		a	b	c	ε
$\rightarrow$	q_1	q_3			q_2, q_5
	q_2	q_2			q_7
	q_3		q_3		q_4
	q_4			q_4	q_7
	q_5			q_7	q_6
	q_6	q_6	q_5		
$\leftarrow$	q_7				

NDA

		a	b	c
$\leftrightarrows$	q_1	q_2, q_3, q_6	q_5	q_7
$\leftarrow$	q_2	q_2		
$\leftarrow$	q_3		q_3	q_4
$\leftarrow$	q_4			q_4
	q_5	q_6	q_5	q_7
	q_6	q_6	q_5	
$\leftarrow$	q_7			

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Konstruáljunk (minimális) VDA-t a következő reguláris kifejezéshez!
$(a^*b)^*c \cup ab^*c^* \cup a^*$.

Megoldás: VDA, redukálás

			a	b	c
$\leftrightarrows$	P	$\{q_1\}$	$\{q_2, q_3, q_6\}$	$\{q_5\}$	$\{q_7\}$
$\leftarrow$	Q	$\{q_2, q_3, q_6\}$	$\{q_2, q_6\}$	$\{q_3, q_5\}$	$\{q_4\}$
	R	$\{q_5\}$	$\{q_6\}$	$\{q_5\}$	$\{q_7\}$
$\leftarrow$	S	$\{q_7\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	T	$\{q_2, q_6\}$	$\{q_2, q_6\}$	$\{q_5\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	U	$\{q_3, q_5\}$	$\{q_6\}$	$\{q_3, q_5\}$	$\{q_4, q_7\}$
$\leftarrow$	V	$\{q_4\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_4\}$
	W	$\{q_6\}$	$\{q_6\}$	$\{q_5\}$	$\{\}$
	X	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	Y	$\{q_4, q_7\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_4\}$

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Konstruáljunk (minimális) VDA-t a következő reguláris kifejezéshez!
$(a^*b)^*c \cup ab^*c^* \cup a^*$.

Megoldás:

		a	b	c
$\leftrightarrows$	P	Q	R	S
$\leftarrow$	Q	T	U	V
	R	W	R	S
$\leftarrow$	S	X	X	X
$\leftarrow$	T	T	R	X
$\leftarrow$	U	W	U	Y
$\leftarrow$	V	X	X	V
	W	W	R	X
	X	X	X	X
$\leftarrow$	Y	X	X	V

$\overset{0}{\sim}$: $\{P, Q, S, T, U, V, Y\}$ $\{R, W, X\}$

$\overset{1}{\sim}$: $\{P\}\,\{Q\}\,\{S\}\,\{T\}\,\{U\}\,\{V, Y\}\,\{R\}\,\{W, X\}$

$\overset{2}{\sim}$: $\{P\}\,\{Q\}\,\{S\}\,\{T\}\,\{U\}\,\{V, Y\}\,\{R\}\,\{W\}\,\{X\}$

$\overset{3}{\sim} = \overset{2}{\sim} = \sim$

Tehát csak a V és Y állapotokat lehet összevonni, a minimális automatának 9 állapota van.

Veremautomaták

Veremautomata (1-verem) alatt a következő 7-est értjük:
$\mathcal{V} = \langle A, T, \Sigma, \delta, a_0, \sigma_0, F \rangle$, ahol

A	az állapotok (véges) halmaza
T	egy ábécé, a bemenő ábécé
Σ	a verem ábécéje
δ	állapotátmeneti függvény, $\delta : A \times (T \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \rightarrow 2^{A \times \Sigma^*}$
$a_0 \in A$	kezdőállapot
$\sigma_0 \in \Sigma$	a verem kezdőszimbóluma
$F \subseteq A$	a végállapotok halmaza.

A veremautomata egy ütemben kiolvassa a központi egység állapotát, az input szó aktuális szimbólumát és a verem tetőelemét, ennek függvényében új állapotba kerül, a verem tetőelemét felülírja egy vagy több jellel, az input szó következő betűjére áll az olvasófej (kivéve ε-mozgás) és a tetőmutató az új tetőelemre áll.

Veremautomaták
Konfigurációátmenet

Konfiguráció (amitől a veremautomata további működése függ): $[a, v, \alpha]$, $a \in A$, $v \in T^*$, $\alpha \in \Sigma^*$. a az aktuális állapot, v az input szó még olvasatlan része α a verem tartalma.

Az $u \in T^*$ input szóhoz tartozó kezdõkonfiguáció: $[a_0, u, \sigma_0]$.

Közvetlen konfiguációátmenet: $[a, u, \alpha] \underset{\mathcal{V}}{\dashv} [b, v, \beta]$, ha $u = tv$, $t \in T \cup \{\varepsilon\}$ és van olyan $\sigma \in \Sigma$, $\gamma, \tau \in \Sigma^*$, hogy $\alpha = \sigma\gamma, \beta = \tau\gamma$, valamint $(b, \tau) \in \delta(a, t, \sigma)$.

Közvetett konfigurációátmenet: a közvetlen konfigurációátmenet tranzitív, reflexív lezártja, jelölése: $\overset{*}{\underset{\mathcal{V}}{\dashv}}$.

Veremautomaták
Elfogadás, determinisztikus veremautomata

$[a, v, \alpha]$ végállapottal elfogadó konfiguráció: ha $a \in F$ és $v = \varepsilon$.

$[a, v, \alpha]$ üres veremmel elfogadó konfiguráció: ha $v = \alpha = \varepsilon$.

$\mathcal{V}$ végállapottal/üres veremmel elfogad egy u szót ha van az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból végállapottal/üres veremmel elfogadó konfigurációba átmenet.

Determinisztikus veremautomata: olyan veremautomata, melyre

- $\forall a \in A, \sigma \in \Sigma, t \in T \cup \{\varepsilon\} : |\delta(a, t, \sigma)| \leq 1$.
- $\forall a \in A, \sigma \in \Sigma : |\delta(a, \varepsilon, \sigma)| \neq 0 \implies \forall t \in T : |\delta(a, t, \sigma)| = 0$.

Veremautomaták
Példa

1. Feladat

Készítsünk üres veremmel elfogadó veremautomatát a csak az a változót tartalmazó helyes kifejezések nyelvéhez!

Megoldás

$\mathcal{V} = \langle \{q_0, q_1\}, \{a, +, -, *, /, (,)\}, \{\#, (\}, \delta, q_0, \#, \ \rangle$.

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, \sigma) = (q_1, \sigma) & \forall \sigma \in \{\#, (\} \\
\delta(q_0, (, \sigma) = (q_0, (\sigma) & \forall \sigma \in \{\#, (\} \\
\delta(q_1, t, \sigma) = (q_0, \sigma) & \forall \sigma \in \{\#, (\}, t \in \{+, -, *, /\} \\
\delta(q_1,), () = (q_1, \varepsilon) & \\
\delta(q_1, \varepsilon, \#) = (q_1, \varepsilon) &
\end{array}$$

Veremautomaták
Példa

2. Feladat

Készítsünk végállapottal elfogadó veremautomatát a következő L nyelvhez! $L = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid u = wcw^{-1}, w \in \{a, b\}^*\}$

Megoldás

$\mathcal{V} = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$.

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, t, \#) = (q_1, t\#) & \forall t \in \{a, b\} \\
\delta(q_1, t_1, t_2) = (q_1, t_1 t_2) & \forall t_1, t_2 \in \{a, b\} \\
\delta(q_1, c, t) = (q_2, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
\delta(q_2, t, t) = (q_2, \varepsilon) & \forall t \in \{a, b\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, \#) = (q_3, \#) &
\end{array}$$

Veremautomaták

Példa

3. Feladat

Készítsünk végállapottal elfogadó veremautomatát a következő L nyelvhez! $L = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = ww^{-1}, w \in \{a, b\}^*\}$

Megoldás

$\mathcal{V} = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\}\rangle.$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, t, \#) = (q_1, t\#) & \forall t \in \{a, b\} \\ \delta(q_1, t_1, t_2) = (q_1, t_1t_2) & \forall t_1, t_2 \in \{a, b\} \\ \delta(q_1, t, t) = (q_2, \varepsilon) & \forall t \in \{a, b\} \\ \delta(q_2, t, t) = (q_2, \varepsilon) & \forall t \in \{a, b\} \\ \delta(q_2, \varepsilon, \#) = (q_3, \#) & \end{array}$$

Itt tehát $\delta(q_1, a, a)$-nak és $\delta(q_1, b, b)$-nek két értéke van, a veremautomata nem determinisztikus.

Veremautomaták

Összefoglaló

A determinisztikus veremautomaták által elfogadott nyelvek osztálya valódi részhalmaza a veremautomaták által elfogadott nyelvek osztályának.

A végállapottal és az üres veremmel elfogadó veremautomaták által elfogadható nyelvek osztálya megegyezik (bármely veremautomatához készíthető egy másik típusú vele ekvivalens veremautomata).

A veremautomaták által elfogadott nyelvek osztálya megegyezik a 2-es típusú nyelvtanok által generált nyelvek osztályával ($\mathcal{L}_2$-vel).

2-vermek: Ezek már minden $\mathcal{L}_0$-beli nyelvet el tudnak fogadni, azaz az 1-vermekhez képest már két osztálynyi az ugrás.

Nagy Bar-Hillel lemma

Szükséges feltétel egy nyelv 2. típusba tartozására

Nagy Bar-Hillel-lemma

Minden $L \in \mathcal{L}_2$ esetén léteznek $p, q > 0$ nyelvfüggő egész konstansok ($p = p(L), q = q(L)$), amelyekre ha $u \in L$, és $l(u) > p$, akkor u-nak létezik $u = xyzvw$ felbontása, ahol $l(yv) > 0$, $l(yzv) \leq q$ és minden $i \geq 0$ egészre $xy^izv^iw \in L$.

Kevésbé formálisan a lényeget a következõképpen fejezhetjük ki: L minden elég hosszú szavában van két, egymáshoz közel lévõ, nem triviális, párhuzamosan beiterálható részszó.

Nagy Bar-Hillel lemma

4. Feladat:

$L = \{a^nb^na^n \mid n \in \mathbb{N}\} \overset{?}{\in} \mathcal{L}_2$

Megoldás:

Nem. Indirekt, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}_2$. Ekkor a Nagy Bar-Hillel lemma szerint léteznek a nyelvfüggő p és q konstansok. Legyen $M = \max\{p, q\}$. Tekintsük az $u = a^Mb^Ma^M$ szót.

Mivel $\ell(u) > M \geq p$, ezért a Nagy Bar-Hillel lemma szerint létezik az u-nak $u = xyzvw$ felbontása, ahol $l(yv) > 0$, $l(yzv) \leq q \leq M = \ell(a^M) = \ell(b^M)$. Tehát vagy x, vagy w tartalmazza a^M-t részszóként. Tegyük fel, hogy x (a másik eset teljesen analóg).

Vizsgáljuk meg, milyen szavakat kapunk y és v párhuzamos beiterálása után. A kettő közül az egyik biztosan nemüres. A kapott szavak $\{xy^izv^iw \mid i \geq 0\}$.

Nagy Bar-Hillel lemma

4. Feladat:
$L = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \overset{?}{\in} \mathcal{L}_2$

Megoldás:(folytatás)

Ha $b^k a^l$ alakű, ahol $k, l > 0$, akkor a beiterálás során olyan szavakat kapnánk amelyek felváltva a-ból és b-ből álló blokkokat tartalmaznak. Ha $i \geq 2$, akkor ezek a szavak nem lesznek L-beliek.

Ha viszont y és v a^k vagy b^k alakú (legalább az egyik kitevő pozitív), akkor az iterációval olyan szavakat kapunk, melyek $a^M b^{M_1} a^{M_2}$ alakúak. Így viszont $i \geq 2$-re $\max\{M_1, M_2\} > M$, azaz a kapott szó ez esetben sem L-beli, tehát a kezdeti, indirekt feltevésünk volt hamis.