Nyelvek használata adatszerkezetek, képek leírására

Formális nyelvek, 2. gyakorlat

Célja: A formális nyelvek elmélete alapfogalmainak gyakorlása, formális nyelvek néhány alkalmazási lehetőségének bemutatása (adatszerkezetek szintaktikus leírása, teknőc grafika képek reprezentálása, fák és nyelvek).

Fogalmak: A formális nyelvek elmélete alapfogalmainak gyakorlása, formális nyelvek néhány alkalmazási lehetőségének bemutatása (adatszerkezetek szintaktikus leírása, teknőc grafika képek reprezentálása, fák és nyelvek).

Feladatok jellege: A lista és a fa adatszerkezet leírása kétszintű nyelvtannal, a Koch-szigetek teknőc-grafikával való leírásának tanulmányozása, fák reprezentációja szelektorhalmazukkal, faosztályok leírása nyelveken értelmezett rekurzióval

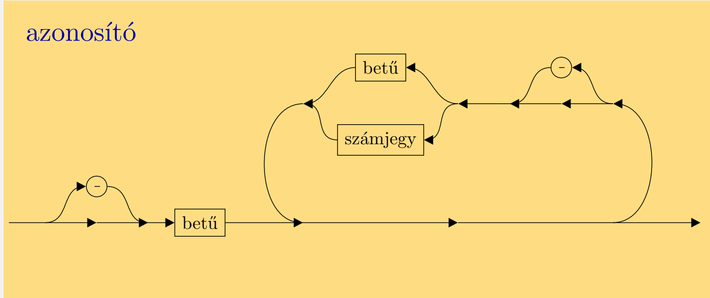
2005/06 II. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Módosított azonosító: belsejében lehet _ jel is. Kezdődhet, de nem végződhet vele, két aláhúzás nem lehet egymás mellett. Írjuk fel (E)BNF formulákkal!

Megoldás:

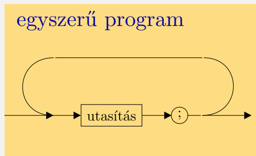


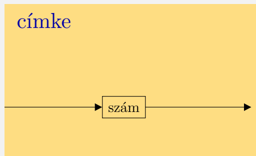
⟨azonosító⟩ ::={ |_}⟨betű⟩@{{ |_}{⟨betű⟩ | ⟨számjegy⟩}}

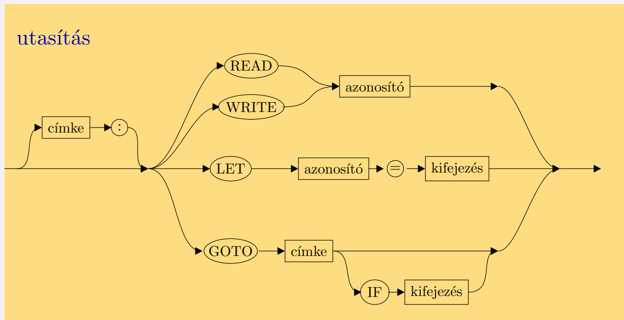
Házi feladatok megoldása

2. feladat

EP teljes átírása szintaxis gráfokkal.



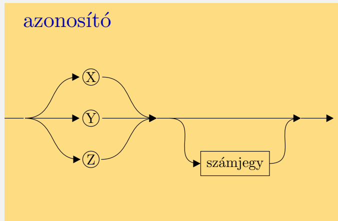


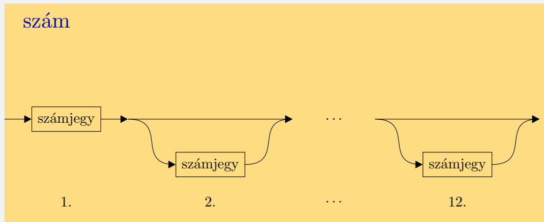


Házi feladatok megoldása

2. feladat

EP teljes átírása szintaxis gráfokkal.

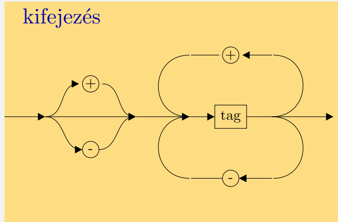


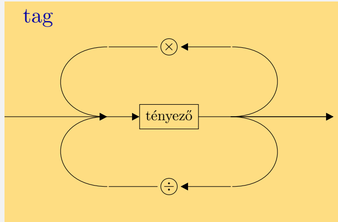


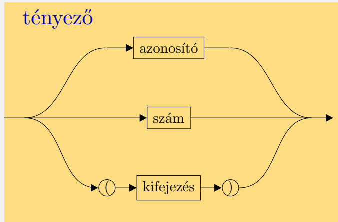
Házi feladatok megoldása

2. feladat

EP teljes átírása szintaxis gráfokkal.







Házi feladatok megoldása

3. feladat

A kiadott PASCAL szintaxis tanulmányozása. A kifejezések átírása (E)BNF-re.

Megoldás:

⟨kifejezés⟩ ::= ⟨egyszerű kifejezés⟩⟨relop⟩⟨egyszerű kifejezés⟩
⟨relop⟩ ::== | < | > | <> | <= | >= |IN
⟨egyszerű kifejezés⟩ ::={ | + |−}⟨tag⟩@{⟨addop⟩⟨tag⟩}
⟨addop⟩ ::=+| − |OR
⟨tag⟩ ::= ⟨tényező⟩@{⟨mpop⟩⟨tényező⟩}
⟨mpop⟩ ::=∗|/|DIV|MOD|AND
⟨tényező⟩ ::=⟨előjel nélküli konstans⟩|⟨változó⟩|
⟨függvénynév⟩{ |(⟨kifejezés⟩@{,⟨kifejezés⟩ })}|
(⟨kifejezés⟩) |NOT ⟨tényező⟩|[ ]|
[⟨kifejezés⟩{ |..⟨kifejezés⟩}@{,⟨kifejezés⟩{ |..⟨kifejezés⟩}}]
És így tovább . . .

Házi feladatok megoldása

4. feladat

Kifejezések leírása W nyelvtannal.

Megoldás:

⟨$\hat{X}$ kifejezés⟩ ::=⟨$\hat{X}$ tag⟩@{⟨$\hat{X}$ addop⟩⟨$\hat{X}$ tag⟩}
⟨$\hat{X}$ tag⟩ ::=⟨$\hat{X}$ tényező⟩@{⟨$\hat{X}$ mpop⟩⟨$\hat{X}$ tényező⟩}
⟨$\hat{X}$ tényező⟩ ::=⟨$\hat{X}$⟩|(⟨$\hat{X}$ kifejezés⟩)|⟨azonosító⟩

Hiperszabály:
$\hat{X}$:= egész | valós | Boole

⟨Boole addop⟩ ::= OR
⟨Boole mpop⟩ ::= AND
⟨egész addop⟩ ::= +|−
⟨egész mpop⟩ ::= ×|/

Prefixek és suffixek

Prefix és suffix

v prefixe u-nak $\Leftrightarrow$ $\exists v'\ u = v\,v'$
v suffixe u-nak $\Leftrightarrow$ $\exists v'\ u = v'v$

$\mathrm{pre}(u,\ell)$ ill. $\mathrm{suf}(u,\ell)$ az u ℓ hosszú prefixe ill. suffixe.
Valódi prefix ill. suffix: $v \neq \varepsilon, u$.

$\mathrm{Pre}(u)=\{v;\ v \text{ prefixe } u\text{-nak}\}$ $\qquad \mathrm{Pre}(L)=\bigcup_{u\in L} \mathrm{Pre}(u)$

$\mathrm{Suf}(u)=\{v;\ v \text{ suffixe } u\text{-nak}\}$ $\qquad \mathrm{Suf}(L)=\bigcup_{u\in L} \mathrm{Suf}(u)$

Ha L zárt a prefix illetve suffix képzésre, akkor
$\mathrm{Pre}(L) = L$ és $\mathrm{Suf}(L) = L$.

r-áris fák

r-áris fa: Olyan gyökeres fa, ahol minden csúcsnak legfeljebb r gyereke van, a gyerekekhez vezető élek a $0, 1, \ldots, r-1$ számok valamelyikével vannak címkézve. Egy csúcs gyerekeihez induló élek címkéje különböző.

Elemi szelektor: a $\{0, 1, \ldots r-1\}$ halmaz egy eleme.

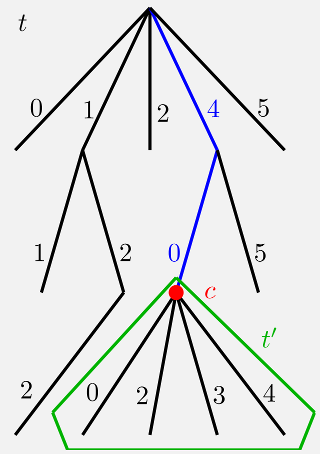
Szelektor: a $\{0, 1, \ldots r-1\}^*$ halmaz egy eleme, azaz elemi szelektorok egy sorozata.

Egy r-áris fában egy élhez tartozó elemi szelektor: az él címkéje.

Egy r-áris fában egy csúcshoz tartozó szelektor: A gyökérből a csúcsba vezető élsorozat éleihez tartozó elemi szelektorok sorozata.

r-áris fák szelektorai

Példa



t 6-áris fa

A t fa szelektorainak halmazát jelölje $\mathrm{Sel}(t)$.

Mi a c csúcshoz tartozó ω szelektor?
$\omega = 40$

$\mathrm{Sel}(t) = \{\varepsilon, 0, 1, 2, 4, 5, 11, 12, 40, 45, 122, 400, 402, 403, 404\}$

$\mathrm{Sel}(t') = \{\omega' \subseteq \{0, 1, \ldots, 5\}^* \mid 40\omega' \in \mathrm{Sel}(t)\} = \{\varepsilon, 0, 2, 3, 4\}$

r-áris fák megadása szelektorainak halmazával

Egy r-áris fa megadható csúcsai szelektorainak halmazával. A szelektorok halmaza zárt a prefixképzésre. És fordítva, $\{0, 1, \ldots, r-1\}^*$ minden prefixképzésre zárt S részhalmazához megadható egy olyan r-áris fa, hogy a szelektorainak halmaza éppen S.

Tehát létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az r-áris fák és $\{0, 1, \ldots r-1\}^*$ prefixképzésre zárt részhalmazai között:

$$t \leftrightarrow \mathrm{Sel}(t) \subseteq \{0, 1, \ldots, r-1\}^*,$$

ahol $\mathrm{Sel}(t)$ a t fa szelektorainak halmaza.
Azaz, $\mathrm{Sel}(t)$ a $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ ábécé fölötti nyelv.

Bináris fák nyelvcsaládja

$\mathcal{L}_{\mathrm{Bin}} = \{L;\ L \subseteq \{0, 1\}^* \wedge L$ zárt a prefix képzésre$\}$

$\mathcal{L}_{\mathrm{Bin}}$ (bináris fák nyelvcsaládja) rekurzív definíciója:

1. $\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathrm{Bin}}$

2. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\mathrm{Bin}}$, akkor $(\{\varepsilon\} \cup 0L_1 \cup 1L_2) \in \mathcal{L}_{\mathrm{Bin}}$

$\mathcal{L}_{\mathrm{TeljBinFa}}$ (teljes bináris fák nyelvcsaládja) rekurzív definíciója:

1. $\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathrm{TeljBinFa}}$

2. $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{TeljBinFa}}$, akkor $(\{\varepsilon\} \cup 0L \cup 1L) \in \mathcal{L}_{\mathrm{TeljBinFa}}$

Nyelv hossza

$$\ell(L) = \begin{cases} \infty & |L| = \infty \\ \max_{v \in L} \ell(v) & \text{különben} \end{cases}$$

További nyelvcsaládok megadása
Rekurzív definícióval

$\mathcal{L}_{\mathrm{AVL}}$ (AVL fák nyelvcsaládja) rekurzív definíciója:

1. $\{\varepsilon\}, \{\varepsilon, 0\}, \{\varepsilon, 1\} \in \mathcal{L}_{\mathrm{AVL}}$
2. ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\mathrm{AVL}}$ és $|\ell(L_1) - \ell(L_2)| \leq 1$,
   akkor $(\{\varepsilon\} \cup 0L_1 \cup 1L_2) \in \mathcal{L}_{\mathrm{AVL}}$

Fibonacci fa: Az adott magasságú AVL fák közül a minimális pontszámú AVL fákat Fibonacci fáknak nevezzük.

$\mathcal{L}_{\mathrm{BinKupac}}$ (bináris kupacok nyelvcsaládja) rekurzív definíciója:

1. $\{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_{\mathrm{BinKupac}}$
2. $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{BinKupac}}$, akkor $(L \cup \ell(L)L) \in \mathcal{L}_{\mathrm{BinKupac}}$

Teknőcgrafika
Szabályok

Teknőcgrafika: Toll a papír felett, valamilyen irányban áll.

$\langle F, d\rangle$	az adott pontból az adott irányba d hosszú vonalat húz véghelyzet: ahol a vonal végetér, irány változatlan
$\langle f, d\rangle$	mint előbb, de nem húz vonalat
$\langle +, \delta\rangle$	δ szöggel balra fordul (óramutató járásával ellentétesen)
$\langle -, \delta\rangle$	δ szöggel jobbra fordul

Ha d és δ rögzített, nem írjuk ki. Pl. $d = 1, \delta = 90°$.

Kezdőirány: vízszintes, kezdőpont: origó.

Teknőcgrafika
Képek, mint a Koch nyelv szavai

Álljon az L_{Koch} nyelv a következő szavakból:

$\omega_0 = F{-}F{-}F{-}F$ négyzet

Legyen a $h : (F, f, +.-)^* \longrightarrow (F, f, +.-)^*$ homomorfizmus a következő:

$h(F) = F{-}F{+}F{+}FF{-}F{-}F{+}F$,
$h(f) = f,\ \ h(+) = +,\ \ h(-) = -.$

L_{Koch} további szavai: $\omega_1 = h(\omega_0)$, $\omega_2 = h^2(\omega_0)$, ...

Az L_{Koch} nyelv szavai a Koch szigetek.

Pl. $\omega_1 = F{-}F{+}F{+}FF{-}F{-}F{+}F{-}F{-}F{+}F{+}FF{-}F{-}F{+}F{-}$
$F{-}F{+}F{+}FF{-}F{-}F{+}F{-}F{-}F{+}F{+}FF{-}F{-}F{+}F.$

Házi feladat

1. Milyen rekurzív tulajdonsággal rendelkeznek a Fibonacci fák? Adjuk meg ez alapján a Fibonacci fák $\mathcal{L}_{\mathrm{FibFa}}$ nyelvcsaládjának rekurzív definícióját!
2. $\mathcal{L}_{\mathrm{BinKupac}}$ rekurzív definíciójának értelme
3. Írjunk programot, mely kirajzolja $n = 4$-ig
   a. a Koch szigeteket
   b. az $L = \{\omega_0, \omega_1 \ldots\}$ nyelv szavait, ahol:
      $\omega_0 = F{+}F{+}F{+}F$, $\omega_{i+1} = h(\omega_i)$, ahol
      $h(F) = F{+}f{-}FF{+}F{+}FF{+}Ff{+}FF{-}f{+}FF{-}F{-}FF{-}Ff{-}FFF$
      $h(f) = ffffff$, $h(+) = +$, $h(-) = -$.