Műveletek nyelvekkel

Formális nyelvek, 3. gyakorlat

Célja: A formális nyelvek elmélete alapfogalmainak elmélyítése, a műveletek gyakorlása

Fogalmak: Műveletek szavakon, nyelveken, reguláris műveletek, halmazműveletek, homomorfizmus, helyettesítés, párhuzamos kompozíció

Feladatok jellege: A műveletek bemutatása konkrét nyelvekre való alkalmazásukon keresztül, műveletekre vonatkozó azonosságok felismerése, bizonyítása.

2005/06 II. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Milyen rekurzív tulajdonsággal rendelkeznek a Fibonacci fák? Adjuk meg ez alapján a Fibonacci fák $\mathcal{L}_{\text{FibFa}}$ nyelvcsaládjának rekurzív definícióját!

Megoldás:

A Fibonacci fák éppen azok az AVL fák, melyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

($\star$) A fa bármely csúcsa által definiált két részfa magassága pontosan eggyel különbözik.

Ezt átfogalmazhatjuk a következő rekurzív feltétellé:

A fa gyökeréhez tartozó két részfa magassága pontosan eggyel különbözik és a két részfa rendelkezik a ($\star$) tulajdonsággal.

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Milyen rekurzív tulajdonsággal rendelkeznek a Fibonacci fák? Adjuk meg ez alapján a Fibonacci fák $\mathcal{L}_{\text{FibFa}}$ nyelvcsaládjának rekurzív definícióját!

Tehát az $\mathcal{L}_{\text{FibFa}}$ nyelvcsalád rekurzív definíciója:

1. $\{\varepsilon\}, \{\varepsilon, 0\}, \{\varepsilon, 1\} \in \mathcal{L}_{\text{FibFa}}$
2. ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\text{FibFa}}$ és $|\ell(L_1) - \ell(L_2)| = 1$, akkor $(\{\varepsilon\} \cup 0L_1 \cup 1L_2) \in \mathcal{L}_{\text{FibFa}}$

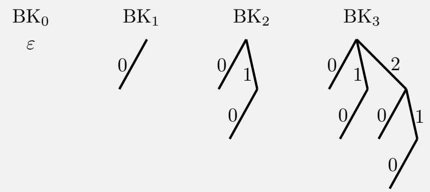
Házi feladatok megoldása

2. feladat

$\mathcal{L}_{\text{BinKupac}}$ rekurzív definíciójának értelme

Megoldás:

$\mathcal{L}_{\text{BinKupac}} = \{\text{BK}_0, \text{BK}_1, \text{BK}_2, \text{BK}_3, \ldots\}$.



$\ell(\text{BK}_i) = i$, $|\text{BK}_n \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}^k| = \binom{n}{k}$, $|\text{BK}_n| = 2^n$.

Indukcióval:
$|\text{BK}_{n+1} \cap \{0, 1, \ldots, n\}^k| = |\text{BK}_n \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}^k| + |\text{BK}_n \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}^{k-1}| = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Írjunk programot, mely kirajzolja $n = 4$-ig

a. *a Koch szigeteket*

b. *a következőt:* $\omega_0 = F{+}F{+}F{+}F,$

$h(F) = F{+}f{-}FF{+}F{+}FF{+}Ff{+}FF{-}f{+}FF{-}F{-}FF{-}Ff{-}FFF$

$h(f) = ffffff,\ \ h(+) = +,\ \ h(-) = -.$

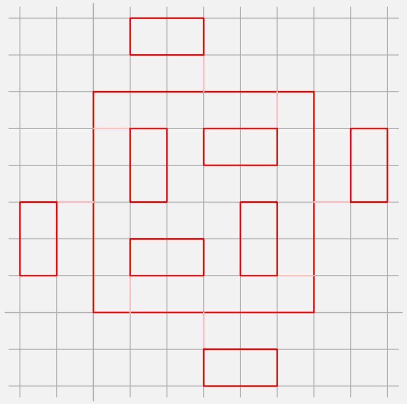
Házi feladatok megoldása

3. feladat

b. $\omega_0 = F{+}F{+}F{+}F,\ \ \omega_i \to \omega_{i+1}:$

$h(F) = F{+}f{-}FF{+}F{+}FF{+}Ff{+}FF{-}f{+}FF{-}F{-}FF{-}Ff{-}FFF$

$h(f) = ffffff,\ \ h(+) = +,\ \ h(-) = -.$



Nyelvek

Definíció

Legyen T egy véges halmaz, a szimbólumok (terminálisok) halmaza.
Ezt a halmazt ábécének nevezzük.
$T^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^i$-t a T lezártjának nevezzük.

Nyelv

L egy T feletti nyelv, ha $L \subseteq T^*$

$T^+ = T^* \setminus \{\varepsilon\}$, ahol ε az üres szó (v. szöveg).
$\{\varepsilon\} = T^0$.

Műveletek nyelvek között

Unió, metszet, konkatenáció, ...

Példa: $T = \{a, b\}$
$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
$L_2 = \{a^{2n+1} b \mid n \geq 0\}$
$L_3 = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

1. $L_1 \cup L_2 =?$ $\{x|(x{=}a^n b^n \wedge n \geq 0) \vee (x{=}a^{2n+1} b \wedge n \geq 0)\},$
2. $L_1 \cap L_2 =?$ $\{ab\},$
3. $L_1 L_2 =?$ $\{a^n b^n a^{2k+1} b | n \geq 0 \wedge k \geq 0\},$
4. $L_2 \cap L_3 =?$ $\emptyset,$
5. $L_1 \cap L_3 =?$ $\{\varepsilon\},$
6. $L_2^* =?$ $((a^2)^* ab)^*.$

Műveletek nyelvek között
Tartalmazási problémák

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
$L_2 = \{a^{2n+1} b \mid n \geq 0\}$

1. $\{a^n b^n a^n b \mid n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_1 L_2$ $\not\subseteq$
2. $\{a^n b^n a^{2n+1} b \mid n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_1 L_2$ $\subseteq$
3. $\{(a^n b^n)^n \mid n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_1^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_1^i$ $\subseteq$
4. $\{(ab)^n \mid n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_2^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_2^i$ $\not\subseteq$

Műveleti tulajdonságok
Monotonitások, a konkatenáció unióra való disztributívitása

1. $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{L'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \forall \lambda \in \Lambda: \ L_\lambda \subseteq L'_\lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L'_\lambda$
2. $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}, L_i \subseteq L'_i \Rightarrow L_1 L_2 \cdots L_n \subseteq L'_1 L'_2 \cdots L'_n$
3. $L \subseteq L' \Rightarrow L^* \subseteq (L')^*$
4. $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) L = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda L$
5. Nem igaz! $L_1(L_2 \cap L_3) = L_1 L_2 \cap L_1 L_3$
   Pl. $L_1 = \{a, \varepsilon\}, L_2 = \{a, a^2\}, L_3 = \{a^3, a^4\}$

Helyettesítés

Helyettesítésnek nevezünk egy $h : 2^{X^*} \longmapsto 2^{Y^*}$ leképezést, ha unió- és konkatenációtartó, valamint $h(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$ és $h(\emptyset) = \emptyset$.
Elegendő X elemein megadni.

Ha $u = x_1 x_2 \cdots x_\ell$, akkor $h(u) = h(x_1) h(x_2) \cdots h(x_\ell)$.
(Jelölés: $h(x) := h(\{x\})$.)

$h(L) = \bigcup_{u\in L} h(u)$ a helyettesítéssel kapott nyelv.

$h^{-1}(u) = \{v \mid u \in h(v)\}, h^{-1}(L) = \bigcup_{u\in L} h^{-1}(u)$

Helyettesítés
Példák

Példa: $X = \{a, b\}$
$h(a) = \{a, \varepsilon\}, h(b) = \{b\}$

A helyettesítéssel kapott nyelv jelölése: $S(L, \{a, \varepsilon\}, \{b\})$.

Példa: HE, helyes zárójelezések nyelve, azaz
$\mathrm{HE} = \{u; \ell_((u) = \ell_)(u) \wedge \forall v \in \mathrm{Pre}(u) : \ell_((v) \geq \ell_)(v)\}$.

Legyen a helyettesítés $X = \{(,)\}$, $Y = \{(,)\}$,
$h(() = \{(\}, h()) = \{\varepsilon,)\}$. Mi lesz $S(\mathrm{HE})$?

$S(\mathrm{HE}) = \{u; \forall v \in \mathrm{Pre}(u) : \ell_((v) \geq \ell_)(v)\}$.

Helyettesítés tulajdonságai

$h(L_1 \cap L_2) \stackrel{?}{=} h(L_1) \cap h(L_2)$ $\neq$

$L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}, h(a) = h(b) = \varepsilon$

$h^{-1}(h(L)) \stackrel{?}{=} L$ $\neq$

L tetszőleges, nemüres, $h(L) = \{\varepsilon\}, h^{-1}(h(L)) = \{a, b\}^*$

$h(h^{-1}(L')) \stackrel{?}{=} L'$ $\neq$

L' tetszőleges, nemüres, melyre $\varepsilon \notin L'$
ekkor $h^{-1}(L') = \emptyset, h(h^{-1}(L')) = \emptyset$.

Párhuzamos kompozíció a HE nyelv példáján

Párhuzamos kompozíció:
A párhuzamos kompozíció a konkatenáció kiterjesztése:

$$u \parallel v = \{z_1 w_1 \cdots z_k w_k;\, z_1 \cdots z_k = u, w_1 \cdots w_k = v,\ z_2 \cdots z_k \neq \varepsilon, w_1 \cdots w_{k-1} \neq \varepsilon\}.$$

Tulajdonságai: $u \parallel v = v \parallel u$, $u \parallel \varepsilon = u$,
$(u \parallel v) \parallel w = u \parallel (v \parallel w)$.

Példa: $ab \parallel cd = \{cdab, cadb, cabd, acdb, acbd, abcd\}$.
Legfeljebb hány elemű lehet $u \parallel v$, ha $\ell(u) = n$ és $\ell(v) = m$? $\binom{n+m}{n}$

Példa: lehet ennél sokkal kevesebb! A zárójelezések nyelvében:
$(()) \parallel () = \{()(()), (()()), ((())), (())()\}$

Ha h_1 és h_2 helyes zárójelezések, akkor $h_1 \parallel h_2 \subseteq \mathrm{HE}$.

$L_1 \parallel L_2 = \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} u \parallel v$ $\quad \mathrm{HE} \parallel \mathrm{HE} = \mathrm{HE}$.

Házi feladat

1. $L_4 = \{ab\}$. $L_4^* \stackrel{?}{\subseteq} L_1^*$.
2. $L^* = L^* L^*$.
3. $(L^*)^* = L^*$.
4. $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$.
5. $(L_1 L_2)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1}$.
6. x palindrom $\Leftrightarrow x^k$ palindrom ($k \geq 1$).
   (x palindrom, ha $x = x^{-1}$)
7. $h(L^{-1}) \stackrel{?}{=} h(L)^{-1}$.
8. $L = \{(^n)^n; n \geq 0\}$. Jelölés: $L^{\parallel i} = \underset{1}{L} \parallel \underset{2}{L} \parallel \ldots \parallel \underset{i}{L}$
   Lássuk be, hogy $\mathrm{HE} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{\parallel i}$.