Nyelvek generálása nyelvtanokkal

Formális nyelvek, 4. gyakorlat

Célja: A formális nyelvek leírására használatos eszközök bemutatása példákon keresztül, különös tekintettel a nyelvtanokra.

Fogalmak: Listázás, felsorolás, parciális és teljes eldöntés, logikai formula, reguláris kifejezés, Turing-gép, formális nyelvtan, levezetés (közvetlen, közvetett), generált nyelv.

Feladatok jellege: Néhány véges nyelv konkrét megadása, T^* -ot felsoroló algoritmus, parciális és totális eldöntő algoritmus valamilyen számhalmazt reprezentáló nyelvre, konkrét logikai formula és reguláris kifejezés, $L = \{uu, u \text{ eleme } T^*\}$-ra Turing-gép, egy egyszerű nyelvtanban levezetés, közvetett levezetés, elfogadott nyelv.

2005/06 II. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_4 = \{ab\}$. $L_4^* \overset{?}{\subseteq} L_1^*$.

Megoldás:

Igen.

Házi feladatok megoldása

2. feladat

$L^* = L^* L^*$

Megoldás:

"$\subseteq$"
Világos, hiszen $\varepsilon \in L^*$

"$\supseteq$"
Legyen $w \in L^* L^*$, ekkor $w = uv,\ u \in L^*,\ v \in L^*$.

Definíció szerint $u = u_1 u_2 \ldots u_k$ és $v = v_1 v_2 \ldots v_\ell$, valamely k, ℓ nemnegatív egész számokra, ahol $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_\ell \in L$.

De ez azt jelenti, hogy u és v konkatenációja L^*-ban van.

Házi feladatok megoldása

3. feladat

$(L^*)^* = L^*$.

Megoldás:

"$\supseteq$"
$L^* = (L^*)^1 \subseteq (L^*)^*$.
"$\subseteq$"
Legyen $u \in (L^*)^*$. Ekkor $u = u_1 u_2 \ldots u_k$ valamely k nemnegatív egész számra, ahol $u_1, \ldots, u_k \in L^*$.

$\forall\, 1 \leq i \leq k$-ra $u_i = u_{i1} u_{i2} \ldots u_{im_i}$ valamely m_i nemnegatív egész számokra, ahol $u_{i1}, \ldots, u_{im_i} \in L$.

u összesen $\sum_{i=1}^{k} m_i$ darab L-beli szó konkatenációja, azaz L^*-beli.

Más megoldás: $(L^*)^i = L^*$ minden $i \geq 1$-re, az előző házi feladat miatt, tehát $(L^*)^* = \varepsilon \cup L^* \cup (L^*)^2 \cup \cdots = L^*$.

Házi feladatok megoldása

4. feladat

$(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$.

Megoldás:

"$\subseteq$"

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \subseteq L_1^* \subseteq L_1^* L_2^* \\ L_2 \subseteq L_2^* \subseteq L_1^* L_2^* \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \cup L_2 \subseteq L_1^* L_2^*.$$

Tehát: $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$.

"$\supseteq$"

$(L_1^* L_2^*)^* \subseteq ((L_1 \cup L_2)^* (L_1 \cup L_2)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

(A 2. és 3. házi feladat eredményét felhasználva.)

Házi feladatok megoldása

5. feladat

$(L_1 L_2)^{-1} = L_2^{-1} L_1^{-1}$.

Megoldás:

$(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, ugyanis ha $u = x_1 \dots x_k$, $v = y_1 \dots y_\ell$, akkor $uv = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_\ell$, és $(uv)^{-1} = y_\ell \dots y_1 x_k \dots x_1 = v^{-1}u^{-1}$.

Tehát: $(L_1 L_2)^{-1} = \{(uv)^{-1}, u^{-1} \in L_1^{-1}, v^{-1} \in L_2^{-1}\} = \{v^{-1}u^{-1}, u^{-1} \in L_1^{-1}, v^{-1} \in L_2^{-1}\} = L_1^{-1} L_2^{-1}$.

Megjegyzés: $(u_1 \dots u_n)^{-1} = u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$ hasonlóan igazolható.

Következmény:
$$\begin{aligned} (L_1 L_2 \dots L_n)^{-1} &= L_n^{-1} \dots L_2^{-1} L_1^{-1} \\ (L^n)^{-1} &= (L^{-1})^n \\ (L^*)^{-1} &= (L^{-1})^*. \end{aligned}$$

Házi feladatok megoldása

6. feladat

x palindrom $\Leftrightarrow$ x^k palindrom $(k \geq 1)$.
(x palindrom, ha $x = x^{-1}$)

Megoldás:

"$\Rightarrow$"

x palindrom $\Rightarrow x = x^{-1} \Rightarrow (x^k)^{-1} = (x^{-1})^k = x^k$.

"$\Leftarrow$"

x^k palindrom $\Rightarrow x^k = (x^k)^{-1} \Rightarrow x^k = (x^{-1})^k$.

Mivel $\ell(x^{-1}) = \ell(x)$, ez csak úgy lehet, hogy $x = x^{-1}$.

Házi feladatok megoldása

7. feladat

$h(L^{-1}) \stackrel{?}{=} h(L)^{-1}$

Megoldás:

Nem igaz, legyen $L = a^*b$ és a homomorfizmus legyen $a \to a$, $b \to ba$.

$L^{-1} = ba^*$,

$h(L^{-1}) = ba^+$,

$h(L) = a^*ba$,

$h(L)^{-1} = aba^*$.

Házi feladatok megoldása

8. feladat

$L = \{(^n)^n;\ n \geq 0\}$. *Jelölés:* $L^{\|i} = \underset{1}{L}\|\underset{2}{L}\|\underset{\ldots}{\ldots}\|\underset{i}{L}$

Lássuk be, hogy $\mathrm{HE} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{\|i}$.

Megoldás:

"$\supseteq$"

Láttuk, hogy $u, v \subseteq \mathrm{HE} \Rightarrow u \| v \subseteq \mathrm{HE}$.
Tehát $\mathrm{HE} \| \mathrm{HE} \subseteq \mathrm{HE}$.
Innen $\mathrm{HE}^{\|i} \subseteq \mathrm{HE}$.
Így $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L^{\|i} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{HE}^{\|i} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{HE} = \mathrm{HE}$.

Házi feladatok megoldása

8. feladat

$L = \{(^n)^n;\ n \geq 0\}$. *Jelölés:* $L^{\|i} = \underset{1}{L}\|\underset{2}{L}\|\underset{\ldots}{\ldots}\|\underset{i}{L}$

Lássuk be, hogy $\mathrm{HE} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{\|i}$.

"$\subseteq$"

Legyen $u \in \mathrm{HE}$ olyan, hogy pontosan n db. bal- és jobbzárójelből áll.
Ekkor $u \in ()^{\|n}$.
Ezt beláthatjuk az u hosszára (felére) vonatkozó indukcióval.
Ha $\ell(u)/2 = 0$, akkor $\varepsilon \in L = L^{\|1}$.

I. $u = (u') \in \mathrm{HE}$, $u' \in \mathrm{HE}$, ekkor $u \in () \| ()^{\|n-1}$.
II. $u = u_1u_2$, $\ell(u_1) = 2n_1$, $\ell(u_2) = 2n_2$. Ekkor $u_1 \in ()^{\|n_1}$, $u_2 \in ()^{\|n_2}$.
Ekkor $u = u_1u_2 \in ()^{\|n_1}()^{\|n_2} \subseteq ()^{\|n_1} \| ()^{\|n_2} = ()^{\|n_1+n_2}$.

Példák formális nyelvek megadására

Felsorolással:
$L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$

Formulával:
$L_2 = \{u, u \in \{a,b\}^* \wedge \ell_a(u) = \ell_b(u)\}$

Reguláris kifejezéssel:
$L_3 = (ab \cup (ba)^*)^*$

Felsoroló algoritmussal:
$L_4 = T^*$

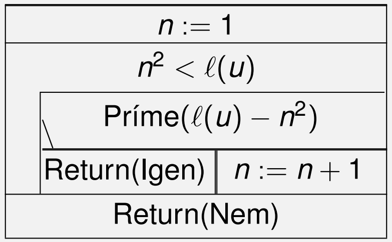
Lexikografikusan felsoroljuk T^* elemeit. Például ha $T = \{0,1\}$, akkor $T^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$

Példák formális nyelvek megadására

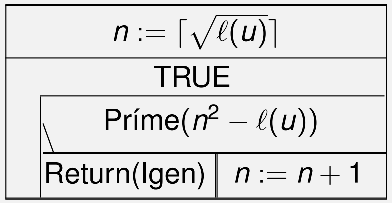
Rekurzív és parciálisan rekurzív nyelvek

Milyen $T = \{a\}$ ábécé feletti nyelvet írnak le az alábbi algoritmusok? Melyik rekurzív illetve parciálisan rekurzív?

A1(u)



A2(u)



A1(u) által generált nyelv:
$L_5 = \{a^j,\ j = n^2 + p, p \text{ prím}\}$

Rekuzív nyelv

A2(u) által generált nyelv:
$L_6 = \{a^j,\ j = n^2 - p, p \text{ prím}\}$

Parcialisan rekurzív nyelv

Számrendszereken alapuló nyelvek generálása 3-as típusú nyelvtannal

L: 3-mal osztható decimális egészek, (nem állhat 0 az elején).

$$G =< \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{S, S_0, S_1, S_2\}, \mathcal{P}, S >$$
$$\begin{array}{lrl} \mathcal{P}: & S \to & 1S_1|2S_2|3S_0|\ldots|9S_0 \\ & S_0 \to & 0S_0|1S_1|2S_2|3S_0|\ldots|9S_0 \\ & S_1 \to & 0S_1|1S_2|2S_0|3S_1|\ldots|9S_1 \\ & S_2 \to & 0S_2|1S_0|2S_1|3S_2|\ldots|9S_2 \\ & S_0 \to & \varepsilon. \end{array}$$

Ez a nyelvtan épp L-et generálja, azaz $L(G) = L$.

Például: $S_0 \to 1S_1 \to 11S_2 \to 112S_1 \to 1122S_0 \to 1122$.

Megjegyzés: ha az 1 illetve 2 maradékot adó számokat szeretnénk generálni, akkor egyszerűen $S_0 \to \varepsilon$ helyett $S_1 \to \varepsilon$-t illetve $S_2 \to \varepsilon$-t írhatunk.

Adott részszavakat nem tartalmazó nyelv generálása

$$L = \{u \in \{a, b, c\}^*; a^3 \not\subseteq u\}$$

$$G =< \{a, b, c\}, \{S_\varepsilon, S_a, S_{\neg a}, S_{aa}\}, \mathcal{P}, S_\varepsilon >$$
$$\begin{array}{lrl} \mathcal{P}: & S_\varepsilon \to & aS_a|bS_{\neg a}|cS_{\neg a}|\varepsilon \\ & S_a \to & aS_{aa}|bS_{\neg a}|cS_{\neg a}|\varepsilon \\ & S_{aa} \to & bS_{\neg a}|cS_{\neg a}|\varepsilon \\ & S_{\neg a} \to & aS_a|bS_{\neg a}|cS_{\neg a}|\varepsilon. \end{array}$$

Ez a nyelvtan épp L-et generálja, azaz $L(G) = L$.

Házi feladat

1. Adjunk reguláris kifejezést a legfeljebb 3 darab a-t tartalmazó $\{a, b\}^*$-beli szavakra!
2. Adjunk a következő nyelvet generáló 3. típusú nyelvtant! Azon M-áris számrendszerbeli számok, melyek d-vel osztva k maradékot adnak. (Nem állhat az elején 0.)
3. Adjunk a következő nyelvet generáló 3. típusú nyelvtant! $L = \{u \in \{a, b, c\}^*; ab, bc, ca \not\subseteq u\}$.