EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

CSÖRNYEI ZOLTÁN

FUNKCIONÁLIS PROGRAMNYELVEK IMPLEMENTÁCIÓJA

II. RÉSZ

A KOMBINÁTOR LOGIKA[1]

BUDAPEST, 2003

[1] Részben az OTKA T037742 támogatásával

Jelölések

A könyvben az ábécék betűivel és a betűtípusokkal a következőket jelöljük:

$x, y, z, \ldots$	*λ-kalkulus és kombinátor logika változó*
$E, F, G, \ldots$	*λ-kalkulus és kombinátor logika kifejezés*
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$	*λ-kalkulus kontextus*
$X, Y, Z, \ldots$	*λ-kalkulus kontextus változó*
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	*típusos λ-kalkulus típusváltozó*
$A, B, C, \ldots$	*típusos λ-kalkulus típuskifejezés*
kurzív	*matematikai függvény*
sans serif	*λ-kalkulus kifejezés neve*
sans serif	*kombinátor logika kifejezés neve*
$\equiv$	*ekvivalencia*
$=$	*egyenlőség*
$\rightarrow$	*típuskonstruktor*
$\rightarrowtriangle$	*redukció*
$\mapsto$	*kombinátor logika optimalizálás*

Tartalomjegyzék

2. FEJEZET

A kombinátor logika

Ebben a fejezetben a kombinátor logika kifejezéseit vizsgáljuk. Először a kombinátor logika kifejezéseit definiáljuk és megadjuk a kifejezések szintaktikus szabályait, majd a kifejezések szemantikájával foglalkozunk.

Két módszer van a kombinátor logika tárgyalására:

1. a λ-kalkuluson belül, mint a λ-kalkulus része, ennek előnye az, hogy felhasználhatók a λ-kalkulusból már megismert eredmények,
2. önálló elméletként, ilyen volt a kombinátor logika eredeti megfogalmazása.

Mi a második módszert követjük, de megmutatjuk a kombinátor logikának a λ-kalkulussal való kapcsolatát, például a kombinátor logika és a λ-kalkulus normál formái közötti különbséget, és módszereket adunk a kombinátor logika és a λ-kalkulus kifejezéseinek egymásba konvertálására is.

Az 1. fejezet felépítését követjük, gyakran — ha a kombinátor logikában is érvényes — szószerint megismételjük a λ-kalkulusban megadottakat.

2.1. A kombinátor logika szintaktikája

Minden funkcionális program egy kifejezésnek tekinthető, a program végrehajtása a kifejezés értékének meghatározását jelenti. Mint majd látni fogjuk, a funkcionális programokat alkotó kifejezések leírhatók a kombinátor logika kifejezéseivel is.

A funkcionális program végrehajtása ezeknek a kifejezéseknek a kiértékelését, azaz a legegyszerűbb formára hozását jelenti. A kombinátor logika ennek elvégzéséhez ad átalakítási szabályokat, azaz a kombinátor logika a kifejezések közötti olyan egyenlőségekből áll, amelyek levezethetők a konverziós szabályokból származtatott axiómákból.

Először a kombinátor logika kifejezéseinek szintaktikájával, majd az operációs szemantikával foglalkozunk, és csak ezután adjuk meg a kombinátor logika pontos definícióját.

2.1.1. Definíció. Az egyszerű kombinátor logika kifejezései:

Tegyük fel, hogy adott egy nem feltétlenül véges, egymástól páronként különböző változókat (szimbólumokat), a K és S konstansokat, valamint a nyitó- és csukózárójelet tartalmazó halmaz. Ezen a halmazon, mint ábécén értelmezett kombinátor logikai kifejezések a következő szavak:

$$\begin{array}{lll}
<\textit{kifejezés}> & ::= & <\textit{változó}> \\
 & | & <\textit{konstans}> \\
 & | & <\textit{applikáció}> \\
<\textit{konstans}> & ::= & \mathsf{K} \ | \ \mathsf{S} \\
<\textit{applikáció}> & ::= & (\ <\textit{kifejezés}> \ <\textit{kifejezés}>\ )
\end{array}$$

A kombinátor logika kifejezéseit röviden *CL-kifejezéseknek* nevezzük, és a CL-kifejezések halmazát $\mathcal{C}$ -vel jelöljük.

A definícióban az „egyszerű” jelző arra utal, hogy a kifejezések halmaza csak a K és az S konstanst tartalmazza. A $\{\mathsf{K}, \mathsf{S}\}$ halmazt az egyszerű kombinátor logika *bázisának* nevezzük.

A továbbiakban a nem feltétlenül egy változóból álló kifejezéseket nagybetűkkel, a változókat kisbetűkkel jelöljük, és a kifejezésekben a legkülső zárójelpárt elhagyjuk.

Két kifejezés szintaktikus *azonosságára* az $\equiv$ jelet használjuk, és azt mondjuk, hogy E „szintaktikusan azonos”, vagy röviden „azonos” F-fel, azaz $E \equiv F$, ha az E és F CL-kifejezések pontosan megegyeznek. Természetesen feltesszük, hogy ha $EF \equiv GH$, akkor $E \equiv G$ és $F \equiv H$. Az $\equiv$ reláció *equivalencia reláció*, azaz *reflexív*, *szimmetrikus* és *tranzitív*.

Az azonosságot arra is használjuk, hogy a CL-kifejezéseknek nevet adjunk, és ezzel a CL-kifejezések leírását lerövidítsük. Ezeket az emlékeztető neveket, *mnemonikokat* ***dőlt sans serif*** betűtípussal írjuk.

A CL-kifejezések azonos átalakításával részletesen a 2.1.3. pontban foglalkozunk.

A CL-kifejezésekre nem definiáltunk absztrakciót, így itt nem beszélhetünk függvényekről. Két CL-kifejezés között egyetlen egy művelet van, az applikáció, és természetesen a függvényapplikáció fogalom sincs értelmezve.

2.1.1. Az applikáció

Mint a 2.1.1. definícióból látható, az applikáció bináris operátor, jele gyakran a $\cdot$, vagy mint a 2.1.2. pontban látni fogjuk, a CL-kifejezés gráfjában az applikációt a @ jel jelöli. Ebben a jegyzetben az applikációt a CL-kifejezések egymás mellé írásával, vagy ha a jobb olvashatóság miatt szükséges, akkor a CL-kifejezések közé írt szóköz karakterrel jelöljük.

2.1.2. Definíció. Az applikáció:

Ha E és F CL-kifejezések, akkor az

EF

CL-kifejezést applikációnak nevezzük.

Az applikáció *balasszociatív*, így például

$(EF)G \equiv EFG,$

azaz a redundáns zárójelpárok elhagyhatók.

2.1.3. Példa. *(Néhány CL-kifejezés)*

$\mathsf{K}EF,$

$\mathsf{S}xyz,$

$\mathsf{SKK},$

$x(\mathsf{K}x)\mathsf{S}y.$ □

2.1.2. A változók

Mivel a kombinátor logikában nincs absztrakció, egy CL-kifejezésben *minden változó szabad.* Ha $FV(E)$ jelöli az E kifejezés változóinak halmazát, akkor

- $FV(x) = \{x\}$,
- $FV(EF) = FV(E) \cup FV(F)$.

Mivel a CL-kifejezésekben minden változó szabad, a kombinátor logikában nincs értelme α-konverzióról beszélni.

2.1.4. Definíció. Zárt CL-kifejezés:

Ha egy CL-kifejezésben nincs változó, akkor a CL-kifejezést zártnak nevezzük.

2.1.5. Definíció. Kombinátor:

A zárt CL-kifejezéseket a kombinátor logika kombinátorainak nevezzük.

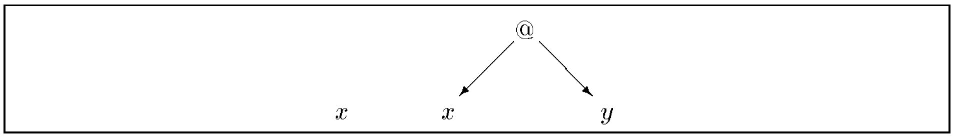
A kombinátorok halmazát $\mathcal{C}^0$ -val jelöljük.

2.1.6. Példa. *(Kombinátorok)*
A 2.1.1. definícióban szereplő K és S konstansok zárt CL-kifejezések, azaz kombinátorok voltak. Kombinátor volt a 2.1.3. példa harmadik sorában megadott CL-kifejezés is. □

Az K és az S kombinátort *primitív kombinátoroknak* is nevezzük. Megjegyezzük, hogy a λ-kalkulus kombinátorait sans serif betűtípussal írjuk, a kombinátor logikában a kombinátorok azonosító neveire a ***dőlt sans serif*** betűtípust használjuk. Tehát K és S λ-kifejezések, K és S pedig a kombinátor logika kifejezései.

2.1.3. Helyettesítés

Rendeljük hozzá az x és az xy CL-kifejezésekhez a 2.1. ábrán látható gráfokat. Ezekből az elemekből egy tetszőleges CL-kifejezés gráfja felépíthető.



2.1. ábra. Az x és az xy CL-kifejezések gráfja

A gráf felépítéséből látható, hogy egy CL-kifejezés gráfja egy olyan fa, amelynek levelein a kombinátor logika változói vagy konstansai vannak, a gráf csúcspontjai pedig az applikációnak felelnek meg. A gráfban a @ szimbólum az applikáció jele.

Egy CL-kifejezés gráfjából a CL-kifejezés részkifejezései is könnyen meghatározhatók. Egy CL-kifejezés *részkifejezését* a következőképpen definiáljuk:

2.1.7. Definíció. Egy *CL*-kifejezés részkifejezése:

Az E, F és G CL-kifejezésre

- *az E önmagának részkifejezése,*
- *ha F az E részkifejezése, akkor F az EG-nek és a GE-nek is részkifejezése.*

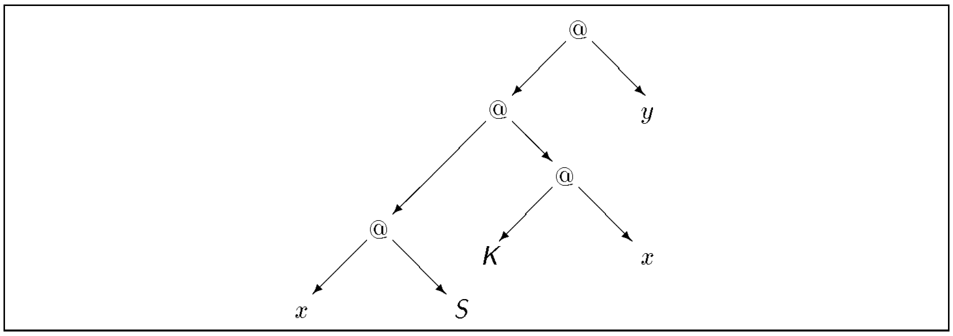
Látható, hogy a részkifejezések a CL-kifejezés gráfjában a „részfáknak" felelnek meg.

2.1.8. Példa. *(Részkifejezések)*
Az $x\mathsf{S}(\mathsf{K}x)y$ CL-kifejezésben balról jobbra haladva a következő részkifejezések vannak (2.2. ábra):

$x, \mathsf{S}, x\mathsf{S}, \mathsf{K}, x, \mathsf{K}x, x\mathsf{S}(\mathsf{K}x), y, x\mathsf{S}(\mathsf{K}x)y.$

Látható, hogy ugyanaz a CL-kifejezés többször is előfordulhat részkifejezésként. Az $\mathsf{S}(\mathsf{K}x)$, vagy például a $(\mathsf{K}x)y$ nem részkifejezés. □

Ha az E CL-kifejezésben az x *változókat* az F CL-kifejezéssel helyettesítjük, akkor a helyettesítéssel kapott CL-kifejezést $E[x := F]$-



2.2. ábra. Az $xS(Kx)y$ CL-kifejezés gráfja

fel jelöljük, ezt régebbi publikációkban gyakran $[F/x]E$ -vel, $[x/F]E$ -vel, $E[x/F]$ -fel vagy $E[F/x]$ -szel is jelölték. Megjegyezzük, hogy az $E[x := F]$ nem CL-kifejezés, hanem ezt a karaktersorozatot csak egy CL-kifejezés jelölésére használjuk.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy az $E[x := F]$ milyen CL-kifejezéssel azonos.

2.1.9. Definíció. Helyettesítés:

1. $x[y := G] \equiv \begin{cases} G, & ha\ x \equiv y, \\ x, & egyébként, \end{cases}$

2. $(EF)[y := G] \equiv (E[y := G])(F[y := G])$.

2.1.10. Példa. *(Kifejezések helyettesítése)*

$x[x := xy] \equiv xy$,

$x[y := xy] \equiv x$,

$xy[y := xy] \equiv xxy$,

$(xy[x := xy])[y := xy] \equiv ((xy)y)[y := xy] \equiv x(xy)(xy)$. □

A helyettesítés *balasszociatív*, így a redundáns zárójeleket elhagyva

$(E[x := F])[y := G] \equiv E[x := F][y := G]$.

A helyettesítésekre nyilvánvalóan igazak a következő egyszerű állítások:

2.1.11. Lemma. (Egyszerű helyettesítések)

1. $E[x := x] \equiv E,$

2. $E[x := F] \equiv E,$ *ha* $x \notin FV(E),$

3. $(E[x := y])[y := x] \equiv E,$ *ha* $y \notin FV(E),$

4. $(E[x := y])[y := F] \equiv E[x := F],$ *ha* $y \notin FV(E),$

5. $(E[x := F])[x := G] \equiv E[x := F[x := G]].$

A helyettesítés definíciójának következménye a következő állítás.

2.1.12. Lemma. (Az $E[x := F]$ változói)

Ha $x \in FV(E)$, *akkor*

$$FV(E[x := F]) = (FV(E) \setminus \{x\}) \cup FV(F).$$

Az E szerkezete szerinti indukcióval bizonyítható a helyettesítési lemmának nevezett következő azonosság.

2.1.13. Lemma. (A helyettesítési lemma)

Ha $x \not\equiv y$ *és* $x \notin FV(G)$, *akkor*

$$E[x := F][y := G] \;\equiv\; E[y := G][x := F[y := G]].$$

2.2. A kombinátor logika operációs szemantikája

A kombinátor logika szemantikáját *konverziós szabályokkal* írjuk le, amelyek megadják, hogy egy CL-kifejezést hogyan lehet egy másik CL-kifejezésbe transzformálni. A konverziós szabályok *reflexív*, *szimmetrikus* és *tranzitív* tulajdonsága biztosítja azt, hogy a konverziós szabályokkal átalakított CL-kifejezés az eredeti CL-kifejezésre visszakonvertálható.

A kombinátor logikában két ilyen konverziós szabály van, ezek a K és S kombinátorokra vonatkoznak. Ezekből a szabályokból látható, hogy a kombinátorok a kombinátor logikában a függvények szerepét játsszák.

2.2.1. Definíció. Gyenge redukció:

$$\begin{aligned} \mathsf{K}EF &\rightarrowtriangle_w E,\\ \mathsf{S}EFG &\rightarrowtriangle_w EG(FG). \end{aligned}$$

A fenti definíció szerint a redukciók csak akkor hajthatók végre, ha a K-nak kettő, S-nek pedig három argumentuma van.

A definíció azt mondja ki, hogy $\mathsf{K}EF$ és $\mathsf{S}EFG$ *gyenge redukálható kifejezések*, *gyenge redexek*. A „gyenge" jelző arra utal, hogy ha egy *CL*-kifejezés nem redukálható, akkor előfordulhat, hogy — mint majd a 2.9.3. és 2.9.5. példákban látni fogjuk, — a neki megfeleltetett λ-kifejezésnek van redexe.

A gyenge redukció fordított irányú alkalmazását, azaz a

$$\begin{aligned} E &\leftarrowtriangle_w \mathsf{K}EF,\\ EF(EG) &\leftarrowtriangle_w \mathsf{S}EFG \end{aligned}$$

átalakításokat *fordított gyenge redukcónak* nevezzük.

A továbbiakban, ha a könnyebb olvashatóság érdekében szükséges, a redukálandó redexet aláhúzással jelöljük.

2.2.2. Lemma. (Az I kombinátor)

Legyen $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$. Ekkor $\mathsf{I}E \rightarrowtriangle_w E$.

Bizonyítás. $\mathsf{I}E \equiv \underline{\mathsf{SKK}E} \rightarrowtriangle_w \underline{\mathsf{K}E(\mathsf{K}E)} \rightarrowtriangle_w E.$ □

Az I kombinátort *identifikáló* kombinátornak, vagy röviden *identifikátornak* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az I kombinátort az SKS kifejezéssel is megadhatjuk, hiszen

$$\mathsf{I}E \equiv \underline{\mathsf{SKS}E} \rightarrowtriangle_w \underline{\mathsf{K}E(\mathsf{S}E)} \rightarrowtriangle_w E.$$

2.2.3. Lemma. (A gyenge-redukció és a változók)

Ha $E \rightarrowtriangle_w F$ és $x \notin FV(E)$, akkor $x \notin FV(F)$.

Bizonyítás. A lemma a gyenge-redukció definíciójából következik. □

2.2.4. Lemma. (A gyenge-redukciók és helyettesítések)

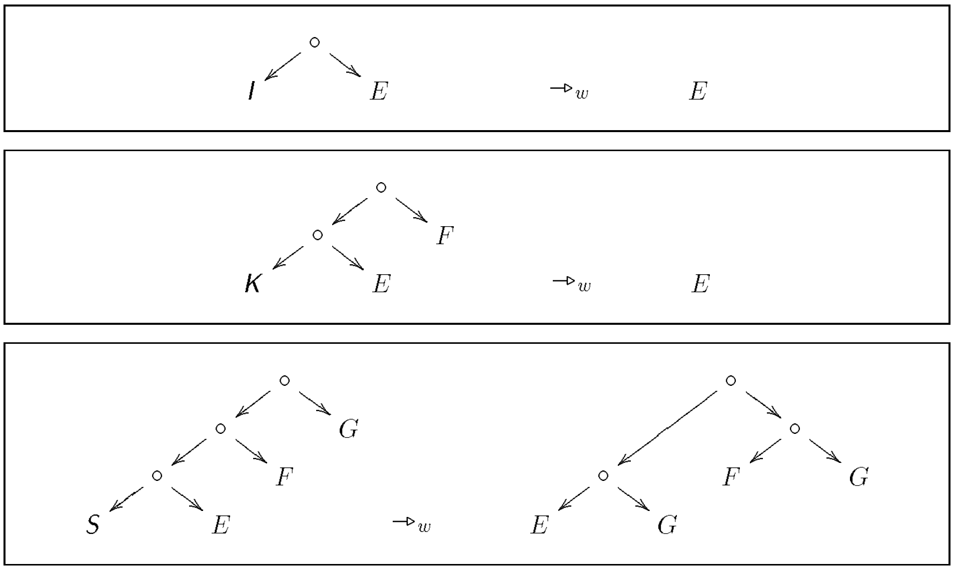
Ha $E \rightarrow_w F$, akkor tetszőleges G -re

1.$G[x := E] \rightarrow_w G[x := F]$,

2.$E[x := G] \rightarrow_w F[x := G]$.

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvaló, a $G[x := E]$ -ben levő E részkifejezésekre kell elvégezni az $E \rightarrow_\beta F$ redukciót. A második állítás bizonyítására vegyük észre, hogy ha R redex és T -re redukálható, akkor $R[x := G]$ is redex, és $T[x := G]$ -re redukálható. □

A gyenge redukció nagyon szemléletesen ábrázolható gráfokkal (2.7. ábra), így egy CL-kifejezés redukálása gráfújraírási módszerekkel könnyen megvalósítható.



2.3. ábra. A gráf-újraírási szabályok

2.2.1. Egyenlőség

Az 2.1.9. definíció két CL-kifejezés szintaktikus azonosságát adta meg. Az előző pontokban láttuk, hogy egy CL-kifejezés konverziókkal egy másik CL-

kifejezésbe alakítható át. Most két CL-kifejezés egyenlőségét definiáljuk. Az egyenlőséget az $=_w$ jellel jelöljük, és *gyenge egyenlőségnek* nevezzük.

2.2.5. Definíció. Két CL-kifejezés gyenge egyenlősége:

Az E és F CL-kifejezésekre $E =_w F$, ha

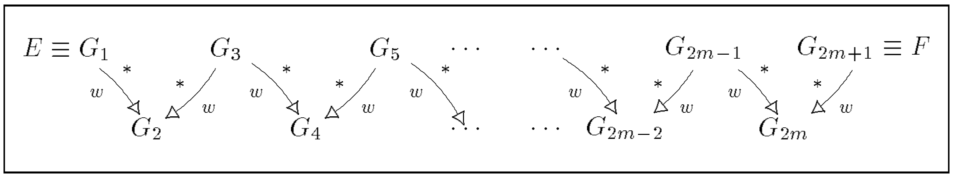
- $E \equiv F$, *vagy*
- $E \leftrightarrow_w^* F$.

A $\leftrightarrow_w$ a kétirányú redukálás lehetőségét, azaz a gyenge redukciót ($\rightarrow_w$) vagy a fordított gyenge redukciót ($\leftarrow_w$) jelöli.

Ha $E =_w F$, akkor az E és az F egymásba *konvertálhatók*. Ha $E \equiv F$, akkor $E =_w F$, de a fordított irányú következtetés természetesen nem áll fenn.

A definíció második pontja azt mondja ki, hogy ha $E =_w F$, akkor létezik olyan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sorozat ($n > 1$), amelyre

$E \equiv F_1$, $F_i \leftrightarrow_w^+ F_{i+1}$ vagy $F_i \equiv F_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$, és $F_n \equiv F$.



2.4. ábra. Az $E =_w F$ egyenlőség.

Speciálisan (2.4. ábra), létezik olyan $G_1, G_2, \ldots, G_{2m}, G_{2m+1}$ sorozat ($m \ge 0$), amelyre

$E \equiv G_1$,
$G_{2j-1} \rightarrow_w^* G_{2j}$ vagy $G_{2j-1} \equiv G_{2j}$ $(1 \le j \le m)$,
$G_{2j} \leftarrow_w^* G_{2j+1}$ vagy $G_{2j} \equiv G_{2j+1}$ $(1 \le j \le m)$,
$G_{2m+1} \equiv F$.

A konverziós szabályok tulajdonságaiból azonnal látható, hogy az egyenlőség reláció *equivalencia reláció*, azaz az egyenlőség

- *reflexív*, $E =_w E$,
- *szimmetrikus*, ha $E =_w F$, akkor $F =_w E$,
- *tranzitív*, ha $E =_w F$ és $F =_w G$, akkor $E =_w G$.

Az egyenlőség relációval a Leibniz-szabály a következőképpen fogalmazható meg:

2.2.6. Tétel. (Leibniz-szabály:)

Ha $E_1 =_w F_1$, E_1 az E CL-kifejezés egy részkifejezése, és F az E-től csak abban különbözik, hogy benne az E_1 részkifejezés helyén az F_1 CL-kifejezés van, akkor $E =_w F$.

A Leibniz-szabály speciális esetei:

2.2.7. Következmény.

Ha $E =_w F$, akkor egy tetszőleges G CL-kifejezésre

1. $EG =_w FG$,

2. $GE =_w GF$.

Ennek a következménynek a „fordított irányú" állítása, azaz hogy például $EG =_w FG$-ből az $E =_w F$ következik, csak a *CL+ext* kalkulusban (2.2.10. definíció) lesz érvényes.

2.2.2. A kombinátor logika axiómái

Miután áttekintettük a kombinátor logika kifejezéseinek szintaktikáját és szemantikáját, megismertük a CL-kifejezések átalakítási, konverziós szabályait, most megadjuk a kombinátor logika pontos definícióját.

2.2.8. Definíció. Az egyszerű típusnélküli kombinátor logika:

Az egyszerű típusnélküli kombinátor logika az egyszerű típusnélküli CL-kifejezések közötti olyan

$E =_w F \quad (E, F \in \mathcal{C})$

egyenlőségeket tartalmaz, amelyek a következő axiómák felhasználásával bizonyíthatók:

I.i.	$\mathsf{K}EF =_w E$	*gyenge konverzió*	(w_K)
I.ii.	$\mathsf{S}EFG =_w EG(FG)$	*gyenge konverzió*	(w_S)
II.i.	$E =_w E$	*reflexívitás*	(ρ)
II.ii.	$E =_w F \;\Rightarrow\; F =_w E$	*szimmetria*	(σ)
II.iii.	$E =_w F$ *és* $F =_w G \;\Rightarrow\; E =_w G$	*tranzitívitás*	(τ)
II.iv.	$E =_w F \;\Rightarrow\; EG =_w FG$	*Leibniz-szab. 1. köv.*	(μ)
II.v.	$E =_w F \;\Rightarrow\; GE =_w GF$	*Leibniz-szab. 2. köv.*	(ν)

A továbbiakban az egyszerű típusnélküli kombinátor logikát jelöljük CL-lel. Ezt a kombinátor logikát gyakran a gyenge redukciók miatt a *gyenge egyenlőség elméletének* is nevezik.

2.2.3. A kiterjesztés

A λ-kalkulusban láttuk, hogy a kiterjeszthetőség azon az észrevételen alapul, hogy ha két függvény értéke minden argumentumra azonos, akkor a két függvény megegyezik. A kiterjeszthetőséget definiálhatjuk a kombinátor logikában is, mivel a kéttagú applikációk első tagját függvénynek tekinthetjük.

2.2.9. Definíció. Kiterjeszthetőség:

Ha $Ex =_w Fx$, *és* $x \notin FV(E)$, $x \notin FV(F)$, *akkor* $E =_w F$.

2.2.10. Definíció. Az egyszerű típusnélküli kiterjesztett kombinátor logika:

A kiterjesztett kombinátor logikát úgy kapjuk meg, hogy a kombinátor logika axiómáit kiegészítjük a

$II.vi. Ex =_w Fx \Rightarrow E =_w F$ *kiterjeszthetőség* (ext)

axiómával.

A kiterjesztett kombinátor logikát $CL{+}ext$ -tel jelöljük.

Mivel a kombinátor logikában nincs explicit függvényfogalom, nem beszélhetünk sem η-, sem ξ-szabályról, és így a λ-kalkulussal ellentétben, a kombinátor logikának csak ez az egy bővítése létezik.

A $CL{+}ext$ kalkulusnak, mint majd a 2.9. pontban látni fogjuk, a λ-kalkulussal való összehasonlításban lesz nagy szerepe.

2.3. A *CL*-kifejezés gyenge normál formája

A CL-kifejezések átalakítására gyenge redukciók és fordított gyenge redukciók szolgálnak. A redukciók sorozatának minden lépésében egy *gyenge redukálható kifejezést*, *gyenge redexet* redukálunk. Ha az E_1 CL-kifejezést gyenge redukciók sorozatával az E_2 CL-kifejezésre alakítjuk át, azaz $E_1 \twoheadrightarrow_w^+ E_2$, akkor azt mondjuk, hogy E_2 az E_1 *gyenge redukáltja.*

2.3.1. Definíció. Gyenge normál forma:

Ha egy CL-kifejezésben nincs gyenge redukálható kifejezés, akkor a CL-kifejezés gyenge normál formában van.

Ha egy CL-kifejezés gyenge redukciók sorozatával gyenge normál formára hozható, akkor azt mondjuk, hogy a CL-kifejezésnek *van gyenge normál formája.*

Ha egy CL-kifejezés gyenge normál formában van, akkor nincs $\mathsf{K}EF$, vagy $\mathsf{S}EFG$ alakú részkifejezése.

2.3.2. Példa. *(A következő CL-kifejezések gyenge normál formában vannak)*

x,

xy,

$\mathsf{K}x,$

$\mathsf{S}x(\mathsf{S}xy).$ □

2.3.3. Példa. *(A következő CL-kifejezés nincs gyenge normál formában, de gyenge normál formára hozható:)*

$\underline{\mathsf{S}x(\mathsf{K}x)y} \rightarrow_w$

$xy(\underline{\mathsf{K}xy}) \rightarrow_w$

xyx □

Ha egy CL-kifejezés nincs gyenge normál formában, akkor nem feltétlenül hozható gyenge normál formára:

2.3.4. Példa. *(A következő CL-kifejezés nincs gyenge normál formában és a CL-kifejezésnek nincs gyenge normál formája)*

$\underline{\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})} \rightarrow_w$

$\underline{\mathsf{I}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})}(\mathsf{I}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})) \rightarrow_w$

$\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}(\underline{\mathsf{I}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})}) \rightarrow_w$

$\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}) \rightarrow_w$

...

A gyenge redukciók sorozata nem terminál, hiszen a harmadik lépésben az eredeti CL-kifejezést kapjuk vissza. A 2.3.6. példában majd látni fogjuk, hogy a harmadik sorban egy másik redex választása is ugyanezt az eredményt adja. □

2.3.1. Redukálási stratégiák

Ha egy CL-kifejezésnek több gyenge redexe is van, akkor a gyenge redexek különböző redukálási sorrendjei különböző gyenge redukálási sorozatokat határoznak meg. Több gyenge redex esetén lehetséges, hogy a különböző gyenge redukálási sorozatok ugyanahhoz a gyenge normál formához vezetnek, de az is lehetséges, hogy az egyik gyenge redukálási sorozattal nem kapjuk meg a CL-kifejezés gyenge normál formáját, egy másik sorozattal viszont a gyenge normál formához jutunk.

2.3.5. Példa. *(Különböző redukálási sorrenddel ugyanazt a gyenge normál formát kapjuk)*

Először redukáljunk a belső gyenge redexszel:

$I(\underline{Ix}) \triangleright_w$
$\underline{Ix} \triangleright_w$
$x.$

Most először redukáljunk a külső gyenge redexszel:

$\underline{I(Ix)} \triangleright_w$
$\underline{Ix} \triangleright_w$
$x.$ □

2.3.6. Példa. *(Egyik redukálási sorrenddel sem kapunk gyenge normál formát)*

A 2.3.4. példában láttuk, hogy

$SII(SII) \triangleright_w^+$
$SII(SII),$

most egy másik redukálási sorozattal:

$\underline{SII(SII)} \triangleright_w$
$\underline{I(SII)}(I(SII)) \triangleright_w$
$\underline{SII(I(SII))} \triangleright_w$
$\underline{I(I(SII))}(I(I(SII))) \triangleright_w$
$\underline{(I(SII))}(I(I(SII))) \triangleright_w$
$SII(I(I(SII))) \triangleright_w$
$\ldots$

ebből pedig azonnal látszik, hogy nincs olyan redukálási sorrend, ami egy gyenge normál formához vezetne. □

2.3.7. Példa. *(A K gyenge redukciójának a végrehajtásával gyenge* *normál formát kapunk, az S gyenge redukciójának végrehajtásakor az 2.3.4. példában is szereplő végtelen ciklust)*

$\underline{\mathsf{K}x(\mathsf{SII}(\mathsf{SII}))} \rightarrow_w$

x,

$\mathsf{K}x(\underline{\mathsf{SII}(\mathsf{SII})}) \rightarrow_w^+$

$\mathsf{K}x(\underline{\mathsf{SII}(\mathsf{SII})}) \rightarrow_w^+$

... □

A kombinátor logikában is érvényesek a λ-kalkulusban megismert Church-Rosser tételek, és azok következményei.

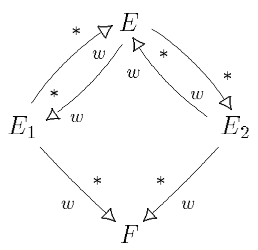
A következő tétel és a tétel következménye ennek az értéknek az egyértelműségét mondja ki.

2.3.8. Tétel. (Az I. Church–Rosser tétel)

Ha $E_1 =_w E_2$, akkor létezik egy olyan F CL-kifejezés, amelyre $E_1 \rightarrow_w^* F$, és $E_2 \rightarrow_w^* F$.

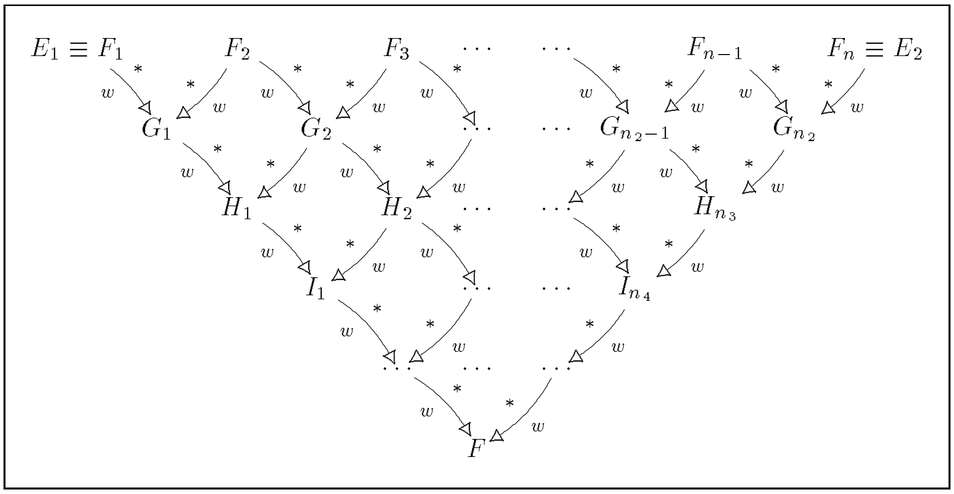
Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítás [Bar84] és [Hin86]-ban is megtalálható. A bizonyítás alapja a következő állítás:

Ha $E \leftrightarrow_w^* E_1$ és $E \leftrightarrow_w^* E_2$, akkor létezik egy olyan F CL-kifejezés, amelyre $E_1 \rightarrow_w^* F$, és $E_2 \rightarrow_w^* F$.



2.5. ábra. A rombusz tulajdonság

Ez az állítás az 2.5. ábrán látható, a gráf alapján ezt a tulajdonságot gyakran *rombusz-tulajdonságnak* is nevezik. Az $E_1 =_w E_2$ egyenlőségben



2.6. ábra. Az I. Church–Rosser tétel

szereplő konverziókra a rombusz-tulajdonságot alkalmazva (2.6. ábra) a tétel állítása bizonyítható. □

Az I. Church–Rosser tétel tehát azt mondja ki, hogy két egymásba transzformálható CL-kifejezéshez mindig létezik, esetleg az egyikkel meg is egyező CL-kifejezés, amelybe mindkét CL-kifejezés átkonvertálható. A tételből két egyszerűen bizonyítható állítás következik:

2.3.9. Következmény.

‖ *Ha $E_1 =_w E_2$, és E_2 gyenge normál formában van, akkor $E_1 \mathrel{-\!\!\triangleright}^*_w E_2$.*

A következmény tehát azt mondja ki, hogy ha egy CL-kifejezésnek létezik gyenge normál formája, akkor a gyenge normál forma a CL-kifejezésből gyenge redukciók sorozatával előállítható.

2.3.10. Következmény.

‖ *Minden CL-kifejezésnek legfeljebb egy gyenge normál formája van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az E CL-kifejezésnek az F_1 és F_2 két különböző gyenge normál formája. Ekkor az I. Church–Rosser tétel alapján létezik olyan F CL-kifejezés, amelyre $F_1 \mathrel{-\!\!\triangleright}^*_w F$ és $F_2 \mathrel{-\!\!\triangleright}^*_w F$. Az F_1 és az F_2 gyenge normál formák, azaz tovább nem redukálhatók, így csak az $F_1 =_w F_2 =_w F$ lehetséges. □

A fenti két következményből azonnal következik a következő tulajdonság:

2.3.11. Következmény.

Ha E és F mindegyike gyenge normál forma, és $E \not\equiv F$, akkor $E \neq_w F$.

A fentiek szerint tehát, ha eljutunk a gyenge normál formához, akkor már közömbös, hogy milyen gyenge redukciók eredményeként kaptuk azt meg, hiszen minden más normál formára hozó redukció ugyanezt az eredményt adja. Ez a kombinátor logika *konzisztens* tulajdonságát mutatja, azaz azt, hogy minden olyan sorozat, amelyik gyenge normál formát állít elő, ugyanahhoz a CL-kifejezéshez vezet. Ugyanakkor a fentiekből az is következik, hogy a kombinátor logika *konfluens*, azaz nincs két olyan gyenge redukciós sorozat, amely különböző gyenge normál formákat állítana elő.

Egy CL-kifejezés legkülső gyenge redexe az a redukálható kifejezése, amelyik nincs más gyenge redexe belsejében. Azt a redukálási stratégiát, amelyik a legbaloldalibb legkülső gyenge redexet redukálja, *normál sorrendű redukálási stratégiának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy alkalmazásával *normál sorrendű* redukálásokat hajtunk végre.

A normál sorrendű redukálás jelentőségét a következő tétel adja meg:

2.3.12. Tétel. (A II. Church–Rosser tétel, a normalizálás tétele)

A normál sorrendű redukálási stratégia mindig normalizáló redukálási stratégia.

A tétel szerint, ha egy CL-kifejezésnek van gyenge normál formája, akkor a gyenge normál forma normál sorrendű redukálási stratégiával előállítható.

2.4. A zárójeles absztrakció

Mint láttuk, a kombinátor logikában nincs olyan függvény jellegű absztrakció, mint a λ-kalkulusban. A kombinátor logikában absztrakción a CL-kifejezésben levő változók absztrahálását értjük, így az absztrahálást végző algoritmusok csak szintaktikus átalakítást végeznek, azaz az absztrakcióval a CL-kifejezést egy másik, de az eredetihez hasonló tulajdonságokkal rendelkező alakjában írjuk fel.

Mivel az x változónak az E CL-kifejezésre alkalmazott absztrakcióját régebben $[x]E$-vel jelölték, ezt az absztrakciót *zárójeles absztrakciónak* nevezzük. Mi az E kifejezés x szerinti absztrakciójára a ma használatos $\lambda^* x\,.\,E$ jelölést fogjuk használni.

Hangsúlyozzuk, hogy a kombinátor logika absztrakciója csak szintaktikus átalakítás, a λ^* ennek az átalakításnak a jele, és ellentétben a λ-kalkulussal, a λ^* nem része a kombinátor logika kifejezéseinek.

Többféle absztrakciós algoritmus létezik, a legegyszerűbb absztrakciós algoritmus a következő:

2.4.1. Definíció. A λ^* absztrakciós algoritmus:

A $\lambda^* x\,.\,E$ kifejezést az E szerkezete szerint definiáljuk:

$$\begin{aligned}
\lambda^* x\,.\,x &\equiv \mathsf{I}, && \\
\lambda^* x\,.\,E &\equiv \mathsf{K}\,E, && \text{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda^* x\,.\,EF &\equiv \mathsf{S}\,(\lambda^* x\,.\,E)(\lambda^* x\,.\,F), && \textit{egyébként.}
\end{aligned}$$

2.4.2. Példa. *(Az $xy(yy)$ CL-kifejezés x szerinti absztrakciója)*

$\lambda^* x\,.\,yx(yy) \equiv$

$\mathsf{S}\,(\lambda^* x\,.\,yx)(\lambda^* x\,.\,yy) \equiv$

$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\lambda^* x\,.\,y)(\lambda^* x\,.\,x))(\lambda^* x\,.\,yy) \equiv$

$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)(\lambda^* x\,.\,x))(\lambda^* x\,.\,yy) \equiv$

$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)\mathsf{I})(\lambda^* x\,.\,yy) \equiv$

$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)\mathsf{I})(\mathsf{K}\,(yy))$ □

2.4.3. Példa. *(Az xy CL-kifejezés x és y szerinti absztrakciói)*

$\lambda^*yx\,.\,xy \equiv$
$\lambda^*y\,.\,(\lambda^*x\,.\,xy) \equiv$
$\lambda^*y\,.\,(\mathsf{S}(\lambda^*x\,.\,x)(\lambda^*x\,.\,y)) \equiv$
$\lambda^*y\,.\,(\mathsf{S}\,\mathsf{I}(\mathsf{K}y)) \equiv$
$\mathsf{S}(\lambda^*y\,.\,(\mathsf{S}\,\mathsf{I}))(\lambda^*y\,.\,(\mathsf{K}y)) \equiv$
$\mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}\,\mathsf{I}))(\lambda^*y\,.\,(\mathsf{K}y)) \equiv$
$\mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}\,\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\lambda^*y\,.\,\mathsf{K})(\lambda^*y\,.\,y)) \equiv$
$\mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}\,\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\mathsf{K}\,\mathsf{K})\mathsf{I})$

Ugyanakkor az absztrakciókat fordított sorrendben végezve:

$\lambda^*xy\,.\,xy \equiv \cdots \equiv$
$\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{S}(\mathsf{K}\,\mathsf{K})\mathsf{I}))(\mathsf{K}\,\mathsf{I})$.

Látható, hogy az eredményül kapott kifejezések nem tartalmaznak változókat. □

A zárójeles absztrakció definíciójából látható, hogy ha az E kifejezésre a λ^* absztrakciót alkalmazzuk, az eredményül kapott kifejezés már nem tartalmaz x változót. Ezt mondja ki a következő tétel.

2.4.4. Tétel. (Változók eliminálása)

Minden E CL-kifejezésre

$$FV(\lambda^*x\,.\,E) = FV(E) \setminus \{x\}.$$

A kombinátor logika zárójeles absztrakciója veszi át a λ-kalkulus függvényfogalmát, olyan értelemben, hogy egy $(\lambda^*x\,.\,E)F$ CL-kifejezés gyenge redukciójának eredménye az $E[x := F]$ helyettesítés lesz, azaz a $(\lambda^*x\,.\,E)F$ applikáció a λ-kalkulus függvényapplikációjához hasonló, és az eredmény olyan, mintha a λ-kalkulus β-redukcióját hajtottuk volna végre.

2.4.5. Tétel. (A zárójeles absztrakció és az applikáció)

Minden E és F CL-kifejezésre

$$(\lambda^*x\,.\,E)F \twoheadrightarrow_w^+ E[x := F].$$

Ha a fenti tételben speciálisan $F \equiv x$, akkor $(\lambda^* x\,.\,E)x \;\twoheadrightarrow_w^+\; E$, azaz visszakapjuk azt az E kifejezést, amelyre a zárójeles absztrakció vonatkozik.

2.4.6. Példa. *(A $(\lambda^* yx\,.\,xy)EF$ és a $(\lambda^* xy\,.\,xy)FE$ applikációk)*

$(\lambda^* yx\,.\,xy)EF \equiv$

$\underline{(\mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}))E}F \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{K}(\mathsf{S}\mathsf{I})E}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}E)F \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{S}\mathsf{I}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}E)F} \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{I}F}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}EF) \;\twoheadrightarrow_w$

$F(\underline{\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}E}F) \;\twoheadrightarrow_w$

$F(\underline{\mathsf{K}\mathsf{K}E}(\mathsf{I}E)F) \;\twoheadrightarrow_w$

$F(\mathsf{K}(\underline{\mathsf{I}E})F) \;\twoheadrightarrow_w$

$F(\underline{\mathsf{K}EF}) \;\twoheadrightarrow_w$

FE

és

$(\lambda^* xy\,.\,xy)FE \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{S})(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}))(\mathsf{K}\mathsf{I}))F}E \;\twoheadrightarrow_w$

$(\underline{\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{S})(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I})F})(\mathsf{K}\mathsf{I}F)E \;\twoheadrightarrow_w$

$(\underline{\mathsf{K}\mathsf{S}F})(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}F)(\mathsf{K}\mathsf{I}F)E \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}F)(\mathsf{K}\mathsf{I}F)E} \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}FE}(\mathsf{K}\mathsf{I}FE) \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{K}\mathsf{K}F}(\mathsf{I}F)E(\mathsf{K}\mathsf{I}FE) \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{K}(\mathsf{I}F)E}(\mathsf{K}\mathsf{I}FE) \;\twoheadrightarrow_w$

$\underline{\mathsf{I}F}(\mathsf{K}\mathsf{I}FE) \;\twoheadrightarrow_w$

$F(\underline{\mathsf{K}\mathsf{I}F}E) \;\twoheadrightarrow_w$

$F(\underline{\mathsf{I}E}) \;\twoheadrightarrow_w$

FE □

A λ-kalkulusban láttuk, hogy egy λ-absztrakció törzsében levő x szabad változó csak akkor helyettesíthető F-fel, ha F-ben nincs szabad x változó, hiszen ez az x változó a helyettesítés után kötötté válna. Hasonló állítás mondható ki a kombinátor logikában is.

2.4.7. Tétel. (A zárójeles absztrakció és a helyettesítés)

Ha $x \not\equiv y$ és $x \notin FV(F)$, akkor

$(\lambda^* x\,.\,E)[y := F] \equiv \lambda^* x\,.\,E[y := F]$.

A tétel az E szerkezete szerinti indukcióval bizonyítható. A tétel feltételei nem feleslegesek, ezekre különösen a több változó szerint zárójeles absztrakciókban kell ügyelni, mint azt a következő példa is mutatja.

2.4.8. Példa. *(Hibás helyettesítés)*
$\lambda^* yx\,.\,y \equiv \mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}$,

és így

$(\lambda^* yx\,.\,y)x \equiv (\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I})x \;\twoheadrightarrow_w$
$\mathsf{K}\mathsf{K}x(\mathsf{I}x) \;\twoheadrightarrow_w^+$
$\mathsf{K}x$.

Ugyanakkor 2.4.5 tétel alapján

$(\lambda^* yx\,.\,y)x \equiv (\lambda^* y\,.\,(\lambda^* x\,.\,y))x \;\twoheadrightarrow_w^+\; (\lambda^* x\,.\,y)[y := x]$,

és nem figyelve a fenti tétel feltételeit:

$(\lambda^* x\,.\,y)[y := x] \equiv$
$\lambda^* x\,.\,y[y := x] \equiv$
$\lambda^* x\,.\,x \equiv \mathsf{I}$,

azaz eredményül az identitás kombinátort kapnánk. □

Ezt a problémát a λ-kalkulusban az α-konverzióval tudtuk megoldani. A λ-kalkulus α-konverziójához hasonló állítás mondható ki a zárójeles absztrakcióra is.

2.4.9. Tétel. **(Az α-konverzió tétele)**

Minden E CL-kifejezésre teljesül, hogy

$\lambda^* x \,.\, E \equiv \lambda^* y \,.\, E[x := y]$, *ha* $y \notin FV(E)$.

Mint már korábban említettük, többfajta absztrakciós algoritmus létezik. Most megadjuk a λ_1^* és a λ_2^* algoritmusokat.

2.4.10. Definíció. **A λ_1^* absztrakciós algoritmus:**

A $\lambda_1^* x \,.\, E$ kifejezést az E szerkezete szerint definiáljuk:

$$
\begin{array}{lll}
\lambda_1^* x \,.\, x & \equiv \mathsf{I}, & \\
\lambda_1^* x \,.\, y & \equiv \mathsf{K}\, y, & \textit{ha } x \not\equiv y, \\
\lambda_1^* x \,.\, E & \equiv \mathsf{K}\, E, & \textit{ha } E \in \{\mathsf{K}, \mathsf{S}\}, \\
\lambda_1^* x \,.\, EF & \equiv \mathsf{S}\,(\lambda_1^* x \,.\, E)(\lambda_1^* x \,.\, F), & \textit{egyébként.}
\end{array}
$$

A definícióból látható, hogy a $\lambda_1^* x$ absztrakcióval $\mathsf{K}\,E$ típusú eredményt csak akkor kapunk, ha $E \in \{\mathsf{K}, \mathsf{S}, y\}$, és minden FG applikáció absztrakciója, függetlenül attól, hogy az x szabad változóként szerepel-e benne, egy S-sel kezdődő hármas applikáció lesz. Ezért a λ_1^* absztrakcióval hosszabb kifekezéseket kapunk, mint a λ^* -gal.

2.4.11. Példa. *(A λ_1^* absztrakció)*
Ezzel az absztrakcióval a 2.4.2. és 2.4.3. példák eredményei a következők:

(a) $\lambda_1^* x \,.\, yx(yy) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x \,.\, yx)(\lambda_1^* x \,.\, yy) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x \,.\, y)(\lambda_1^* x \,.\, x))(\lambda_1^* x \,.\, yy) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)(\lambda_1^* x \,.\, x))(\lambda_1^* x \,.\, yy) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)\mathsf{I})(\lambda_1^* x \,.\, yy) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)\mathsf{I})(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x \,.\, y)(\lambda_1^* x \,.\, y)) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)\mathsf{I})(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)(\lambda_1^* x \,.\, y)) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)\mathsf{I})(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,y)(\mathsf{K}\,y))$,

(b) $\lambda_1^* yx \,.\, xy \equiv$

$\lambda_1^* y\,.\,(\lambda_1^* x\,.\,xy) \equiv$
$\lambda_1^* y\,.\,(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x\,.\,x)(\lambda_1^* x\,.\,y)) \equiv$
$\lambda_1^* y\,.\,(\mathsf{S}\,\mathsf{I}\,(\mathsf{K}\,y)) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{S}\,\mathsf{I})(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{K}\,y) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{S})(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{I}))(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{K}\,y) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{K}\,\mathsf{I}))(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{K}\,y) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{K}\,\mathsf{I}))(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* y\,.\,\mathsf{K})(\lambda_1^* y\,.\,y)) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{K}\,\mathsf{I}))(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\mathsf{K})\,\mathsf{I}),$

(c) $\lambda_1^* xy\,.\,xy \equiv$
$\lambda_1^* x\,.\,(\lambda_1^* y\,.\,xy) \equiv$
$\lambda_1^* x\,.\,(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* y\,.\,x)(\lambda_1^* y\,.\,y)) \equiv$
$\lambda_1^* x\,.\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,x)\,\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x\,.\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,x)))(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{S})(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{K}\,x))(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{K}\,x))(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{S}\,(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{K})(\lambda_1^* x\,.\,x)))(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{K})\,\mathsf{I}))(\lambda_1^* x\,.\,\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{K})\,\mathsf{I}))(\mathsf{K}\,\mathsf{I}).$ □

2.4.12. Definíció. A λ_2^* absztrakciós algoritmus:

A $\lambda_2^* x\,.\,E$ kifejezést az E szerkezete szerint definiáljuk:

$\lambda_2^* x\,.\,x \equiv \mathsf{I}$
$\lambda_2^* x\,.\,E \equiv \mathsf{K}\,E,$ *ha* $x \notin FV(E)$,
$\lambda_2^* x\,.\,Ex \equiv E,$ *ha* $x \notin FV(E)$,
$\lambda_2^* x\,.\,EF \equiv \mathsf{S}\,(\lambda_2^* x\,.\,E)(\lambda_2^* x\,.\,F),$ *egyébként.*

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a definíció harmadik sorában a λ-kalkulus η-konverziójához hasonló azonosságot látunk.

2.4.13. Példa. *(A λ_2^* absztrakció)*

A λ_2^* absztrakcióval az előző példák eredményei a következők:

(a) $\lambda_2^* x\,.\,yx(yy) \equiv$
$S(\lambda_2^* x\,.\,yx)(\lambda_2^* x\,.\,yy) \equiv$
$Sy(\lambda_2^* x\,.\,yy) \equiv$
$Sy(K(yy))$,

(b) $\lambda_2^* yx\,.\,xy \equiv$
$\lambda_2^* y\,.\,(\lambda_2^* x\,.\,xy) \equiv$
$\lambda_2^* y\,.\,(S(lcskx\,.\,x)(\lambda_2^* x\,.\,y)) \equiv$
$\lambda_2^* y\,.\,(SI(Ky)) \equiv$
$S(\lambda_2^* y\,.\,SI)(\lambda_2^* y\,.\,Ky) \equiv$
$S(K(SI))K$,

(c) $\lambda_2^* xy\,.\,xy \equiv$
$\lambda_2^* x\,.\,(\lambda_2^* y\,.\,xy) \equiv$
$\lambda_2^* x\,.\,x \equiv$
I. □

Majd látni fogjuk, hogy a Curry-Howard izomorfizmus alapján a kombinátor logika a Hilbert-stílusú intuicionista ítéletkalkusnak felel meg. Mivel a zárójeles absztrakció alkalmazása „eltünteti” a CL-kifejezésekből a változókat, a zárójeles absztrakció éppen azt a Schönfinkel és Curry által kitűzött célt valósította meg, hogy a logikai formulákban ne legyenek változók, és így a matematika, a logika megalapozását egy változó nélküli formális rendszerrel kísérelték meg.

2.5. Zárójeles absztrakció új kombinátorokkal

A λ^* zárójeles absztrakció definíciójából látható, hogy egy CL-kifejezés átalakításakor a λ^* egyes lépései megduplázzák a CL-kifejezésben levő applikációk darabszámát. Általában azt mondhatjuk, hogy ha a CL-kifejezés hossza m, és a CL-kifejezésben n változó van, akkor az n változóra alkalmazott λ^* zárójeles absztrakció alkalmazása után a CL-kifejezés hossza $O(mn^3)$.

A CL-kifejezések hosszának csökkentésére két módszer adható meg:

1. optimalizálás,
2. új kombinátorok bevezetése.

Az *egyszerű* $CL+ext$ kombinátor logikára az *optimalizálás* a következő *újraírási szabályokkal* adható meg, az újraírási szabály azt jelenti, hogy a $\mapsto$ baloldalán álló kifejezés a jobboldalon levő kifejezéssel helyettesíthető.

- $\mathsf{S}(\mathsf{K}E)\mathsf{I} \quad \mapsto E,$
- $\mathsf{S}(\mathsf{K}E)(\mathsf{K}F) \mapsto \mathsf{K}(EF),$

hiszen minden G-re

$$\mathsf{S}(\mathsf{K}E)\mathsf{I}G \ \twoheadrightarrow_w \ \mathsf{K}EG(\mathsf{I}G) \ \twoheadrightarrow_w \ E(\mathsf{I}G) \ \twoheadrightarrow_w \ EG,$$

és ebből az *ext* kiterjesztési axióma alapján az első optimalizációs szabályt kapjuk meg. Hasonlóan,

$$\mathsf{S}(\mathsf{K}E)(\mathsf{K}F)G \ \twoheadrightarrow_w \ \mathsf{K}EG(\mathsf{K}FG) \ \twoheadrightarrow_w \ E(\mathsf{K}FG) \ \twoheadrightarrow_w \ EF,$$

és

$$\mathsf{K}(EF)G \ \twoheadrightarrow_w \ EF.$$

Így az $=_w$ egyenlőség definíciója alapján

$$\mathsf{S}(\mathsf{K}E)\mathsf{I}G =_w \mathsf{K}(EF)G,$$

ebből pedig ismét az *ext* kiterjesztési axióma felhasználásával a második optimalizációs szabály adódik.

2.5.1. A $CL^{(C)}$ kombinátor logika és a λ_3^* absztrakció

Most az *egyszerű* CL kombinátor logika konstansainak halmazát bővítsük a B és C új kombinátorokkal.

2.5.1. Definíció. A $CL^{(C)}$ kombinátor logika konstansai:

$< konstans > ::= \mathsf{K} \mid \mathsf{S} \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{C}$

A $CL^{(C)}$ kombinátor logika *bázisa* tehát a $\{\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$ halmaz. Az új kombinátorokra vonatkozó *konverziós szabályok* a következők:

2.5.2. Definíció. A $CL^{(C)}$ kombinátor logika új gyenge redukciói:

$\mathsf{B}EFG \rightarrow_w E(FG),$
$\mathsf{C}EFG \rightarrow_w EGF.$

Látható (2.7. ábra), hogy a B kombinátor függvény-kompozíciót hajt végre, hiszen kiírva néhány zárójelet

$((\mathsf{B}E)F)G \rightarrow_w E(FG),$

ezért a kombinátort *kompozítornak* nevezzük. A B kombinátor fordított gyenge redukciója pedig éppen a *currizást* valósítja meg. A C az E két argumentumát cseréli fel, vagy ha az E és F mindegyikét függvénynek tekintjük, akkor a G argumentumot az E-hez, az „eggyel balra levő” függvényhez viszi át. A C kombinátor a *permutátor* nevet kapta.

Könnyen belátható, hogy az új kombinátorokkal a $CL^{(C)}+ext$ kombinátor logikában a következő optimalizációk hajthatók végre:

- $\mathsf{S}(\mathsf{K}E)F \mapsto \mathsf{B}EF,$
- $\mathsf{S}E(\mathsf{K}F) \mapsto \mathsf{C}EF,$

hiszen például az első újraírási szabályra

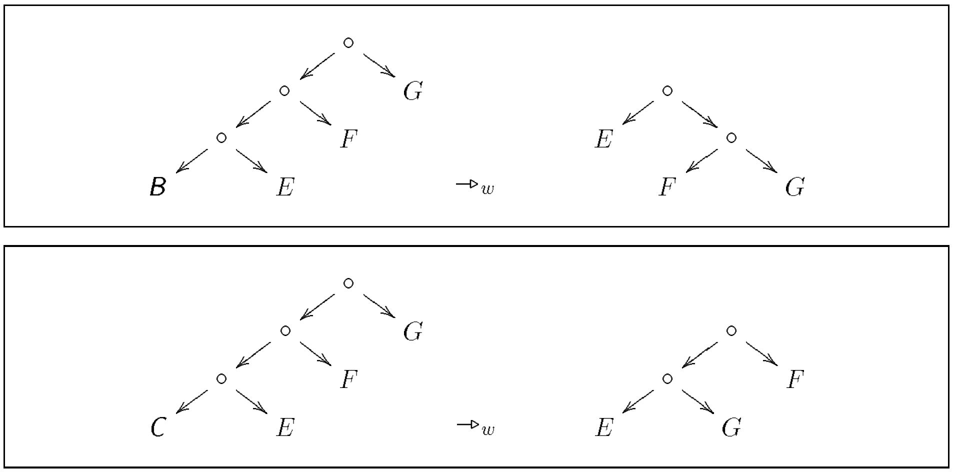
$\mathsf{S}(\mathsf{K}E)FG \rightarrow_w \mathsf{K}EG(FG) \rightarrow_w E(FG),$

és

$\mathsf{B}EFG \rightarrow_w E(FG),$

így

$\mathsf{S}(\mathsf{K}E)FG = \mathsf{B}EFG,$



2.7. ábra. A B és C kombinátorok gráf-újraírási szabálya

és ebből az *ext* kiterjesztési axióma alapján éppen az első optimalizációt kapjuk meg. Megjegyezzük, hogy az első újraírási szabályból az *ext* axióma alapján

- $\mathsf{S}(\mathsf{K}E) \mapsto \mathsf{B}E$.

Az újraírási szabályok felhasználásával azonnal látható, hogy a $CL^{(C)}+ext$ kombinátor logikában

$$
\begin{aligned}
\mathsf{B} &\equiv \mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{S})\mathsf{K},\\
\mathsf{C} &\equiv \mathsf{S}(\mathsf{B}\mathsf{B}\mathsf{S})(\mathsf{K}\mathsf{K})\\
&\equiv \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{S})\mathsf{K}))\mathsf{S})(\mathsf{K}\mathsf{K}).
\end{aligned}
$$

A $\{\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$ bázisú, bővített kombinátor logika $CL^{(C)}$ jelölése arra utal, hogy Curry javasolta azt, hogy a λ-kifejezések CL-kifejezésekre való alakításakor minden $\mathsf{S}EF$ kifejezés generálásakor vizsgáljuk meg a fenti újraírási szabályok alkalmazhatóságát. Ezt a módszert *Curry-algoritmusnak* nevezzük. Az algoritmus alkalmazásakor a CL-kifejezés hossza csak *négyzetesen* növekszik.

2.5.3. Példa. *(A Curry-algoritmus)*
A Curry-algoritmussal a 2.4.2. és 2.4.3. példák eredményei a következők:

(a) $\lambda_2^* x \,.\, yx(yy) \equiv$
$\mathsf{S}(\lambda_2^* x \,.\, yx)(\lambda_2^* x \,.\, yy) \equiv$
$\mathsf{S}y(\lambda_2^* x \,.\, yy) \equiv$
$\mathsf{S}y(\mathsf{K}(yy)) \mapsto \mathsf{C}y(yy)$,

(b) $\lambda_2^* yx \,.\, xy \equiv$
$\lambda_2^* y \,.\, (\lambda_2^* x \,.\, xy) \equiv$
$\lambda_2^* y \,.\, (\mathsf{S}(\lambda_2^* x \,.\, x)(\lambda_2^* x \,.\, y)) \equiv$
$\lambda_2^* y \,.\, (\mathsf{SI}(\mathsf{K}y)) \mapsto$
$\lambda_2^* y \,.\, \mathsf{CI}y \equiv$
CI,

(c) $\lambda_2^* xy \,.\, xy \equiv$
$\lambda_2^* x \,.\, \lambda_2^* y \,.\, xy \equiv$
$\lambda_2^* x \,.\, x \equiv$
I. □

2.5.4. Példa. *(Az $f(xx)$ absztrakciója a Curry-algoritmussal)*
$\lambda_2^* fx \,.\, f(xx) \equiv \lambda_2^* f \,.\, \lambda_2^* x \,.\, f(xx) \equiv$
$\lambda_2^* f \,.\, \mathsf{S}(\lambda_2^* x \,.\, f)(\lambda_2^* x \,.\, xx) \equiv$
$\lambda_2^* f \,.\, \mathsf{S}(\mathsf{K}f)(\mathsf{S}(\lambda_2^* x \,.\, x)(\lambda_2^* x \,.\, x)) \equiv$
$\lambda_2^* f \,.\, \mathsf{S}(\mathsf{K}f)(\mathsf{SII}) \mapsto$
$\lambda_2^* f \,.\, \mathsf{B}f(\mathsf{SII}) \equiv$
$\mathsf{S}(\lambda_2^* f \,.\, \mathsf{B}f)(\lambda_2^* f \,.\, \mathsf{SII}) \equiv$
$\mathsf{SB}(\mathsf{K}(\mathsf{SII})) \mapsto$
$\mathsf{CB}(\mathsf{SII})$. □

Az optimalizációs lépések beépíthetők az absztrakciós algoritmusba is, a B és C kombinátorok felhasználásával a λ_2^* zárójeles absztrakció a következőképpen módosítható. Az absztrakciót *Turner-absztrakciónak* nevezzük és λ_3^*-mal jelöljük. Ha egy n változót tartalmazó, m hosszú CL-kifejezésre a λ_3^* absztrakciós algoritmust használjuk, akkor $O(mn^2)$ hosszúságú kifejezést kapunk.

2.5.5. Definíció. A λ_3^* Turner-absztrakciós algoritmus:

A $\lambda_3^* x\,.\,E$ kifejezést az E szerkezete szerint definiáljuk:

$$
\begin{array}{lll}
\lambda_3^* x\,.\,x & \equiv \mathsf{I} & \\
\lambda_3^* x\,.\,E & \equiv \mathsf{K}E, & \textit{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda_3^* x\,.\,Ex & \equiv E, & \textit{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda_3^* x\,.\,EF & \equiv \mathsf{B}E(\lambda_3^* x\,.\,F), & \textit{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda_3^* x\,.\,EF & \equiv \mathsf{C}(\lambda_3^* x\,.\,E)F, & \textit{ha } x \notin FV(F), \\
\lambda_3^* x\,.\,EF & \equiv \mathsf{S}(\lambda_3^* x\,.\,E)(\lambda_3^* x\,.\,F), & \textit{egyébként.}
\end{array}
$$

2.5.6. Példa. *(A λ_2^* absztrakció és az optimalizálás)*
Megmutatjuk, hogy a λ_3^* Turner-absztrakció 4. szabálya a λ_2^* absztrakciós algoritmusból és az újraírási szabályokból levezethető. Tegyük fel, hogy $x \notin FV(E)$. Ekkor

$$
\begin{array}{l}
\lambda_2^* x\,.\,EF \equiv \\
\mathsf{S}(\lambda_2^* x\,.\,E)(\lambda_2^* x\,.\,F) \equiv \\
\mathsf{S}(\mathsf{K}E)(\lambda_2^* x\,.\,F).
\end{array}
$$

Az $\mathsf{S}(\mathsf{K}E)F \mapsto \mathsf{B}EF$ újraírási szabályt alkalmazva

$$\mathsf{S}(\mathsf{K}E)(\lambda_2^* x\,.\,F) \mapsto \mathsf{B}E(\lambda_2^* x\,.\,F),$$

azaz éppen a λ_3^* negyedik szabályát kaptuk meg. □

2.5.7. Példa. *(A λ_3^* Turner-absztrakció)*
Ezzel az absztrakcióval a 2.4.2. és 2.4.3. példák eredményei a következők:

(a) $\lambda_3^* x\,.\,yx(yy) \equiv$
$\mathsf{C}(\lambda_3^* x\,.\,yx)(yy) \equiv$

$\mathsf{C}\,y(yy)$,

(b) $\lambda_3^* yx \,.\, xy \equiv$
$\lambda_3^* y \,.\, \lambda_3^* x \,.\, xy \equiv$
$\lambda_3^* y \,.\, \mathsf{C}(\lambda_3^* x \,.\, x)y \equiv$
$\lambda_3^* y \,.\, \mathsf{C}\mathsf{I}\,y \equiv$
$\mathsf{C}\mathsf{I}$,

(c) $\lambda_1^* xy \,.\, xy \equiv$
$\lambda_1^* x \,.\, \lambda_1^* y \,.\, xy \equiv$
$\lambda_1^* x \,.\, x \equiv$
I. □

2.5.8. Példa. *(Az $x(yy)$ Turner-absztrakciója)*
$\lambda_3^* xy \,.\, x(yy) \equiv \lambda_3^* x \,.\, \lambda_3^* y \,.\, x(yy) \equiv$
$\lambda_3^* x \,.\, \mathsf{B}x(\lambda_3^* y \,.\, yy) \equiv$
$\lambda_3^* x \,.\, \mathsf{B}x(\mathsf{S}(\lambda_3^* y \,.\, y)(\lambda_3^* y \,.\, y)) \equiv$
$\lambda_3^* x \,.\, \mathsf{B}x(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{C}(\lambda_3^* x \,.\, \mathsf{B}x)(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}) \equiv$
$\mathsf{C}\mathsf{B}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})$. □

2.5.9. Példa. *(Az Y kombinátor)*
Az előző példa eredményét felhasználva,

$\lambda_3^* x \,.\, (\lambda_3^* y \,.\, x(yy))(\lambda_3^* y \,.\, x(yy)) \equiv$
$\lambda_3^* x \,.\, (\mathsf{B}x(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}))(\mathsf{B}x(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})) \equiv$
$\mathsf{S}(\lambda_3^* x \,.\, (\mathsf{B}x(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})))(\lambda_3^* x \,.\, (\mathsf{B}x(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}))) \equiv$
$\mathsf{S}(\mathsf{C}(\lambda_3^* x \,.\, \mathsf{B}x)(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}))(\mathsf{C}(\lambda_3^* x \,.\, \mathsf{B}x)(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I})) \equiv$
$\mathsf{S}(\mathsf{C}\mathsf{B}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}))(\mathsf{C}\mathsf{B}(\mathsf{S}\mathsf{I}\mathsf{I}))$.

A 2.8.1. pontban majd látni fogjuk, hogy ez a kifejezés éppen az Y fixpont kombinátor CL-kifejezése. □

2.5.2. A $CL^{(T)}$ kombinátor logika és a λ_4^* absztrakció

A zárójeles absztrakciók algoritmusaiból látható, hogy az eredményül kapott CL-kifejezések hosszát lényegesen az applikációkra alkalmazott absztrakciók növelik, különösen igaz ez a többváltozós absztrakciókra.

Turner keresett egy olyan kombinátort, amivel a többváltozós absztrakcióval kapott CL-kifejezések hossza legfeljebb *négyzetesen* növekszik. Bevezette az új S' kombinátort, és megadta az S' gyenge redukcióját:

$$\mathsf{S}'C\,EFG \;\triangleright_w\; C\,(EG)(FG), \qquad C \in \mathcal{C}^0.$$

Az S' gyenge redukcióját a következők indokolják.

$$\begin{aligned}
&(\lambda_3^* x\,.\,CEF)G \equiv\\
&\mathsf{S}\,(\lambda_3^* x\,.\,CE)(\lambda_3^* x\,.\,F)G \equiv\\
&\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\lambda_3^* x\,.\,C)(\lambda_3^* x\,.\,E))(\lambda_3^* x\,.\,F)G \equiv\\
&\mathsf{S}\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}C)(\lambda_3^* x\,.\,E))(\lambda_3^* x\,.\,F)G \;\triangleright_w\\
&\mathsf{S}\,(\mathsf{K}C)(\lambda_3^* x\,.\,E)G((\lambda_3^* x\,.\,F)G) \;\triangleright_w\\
&\mathsf{K}CG((\lambda_3^* x\,.\,E)G)((\lambda_3^* x\,.\,F)G) \;\triangleright_w\\
&C((\lambda_3^* x\,.\,E)G)((\lambda_3^* x\,.\,F)G).
\end{aligned}$$

Ugyanakkor az S' gyenge redukcióját alkalmazva

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}'C(\lambda_3^* x\,.\,E)(\lambda_3^* x\,.\,F)G \;\triangleright_w\\
&C((\lambda_3^* x\,.\,E)G)((\lambda_3^* x\,.\,F)G),
\end{aligned}$$

azaz

$$(\lambda_3^* x\,.\,CEF)G =_w \mathsf{S}'C(\lambda_3^* x\,.\,E)(\lambda_3^* x\,.\,F)G,$$

és az *ext* kiterjesztési axióma alapján

$$(\lambda_3^* x\,.\,CEF) =_w \mathsf{S}'C(\lambda_3^* x\,.\,E)(\lambda_3^* x\,.\,F),$$

látható tehát, hogy a CEF zárójeles absztrakciója átvihető az E és F absztrakciójába.

2.5.10. Példa. *(A $\lambda_3^* xyzv\,.\,EF$ kifejezés)*

$\lambda_3^* xyzv\,.\,EF \equiv$
$\lambda_3^* x\,.\,\lambda_3^* y\,.\,\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,EF \equiv$
$\lambda_3^* x\,.\,\lambda_3^* y\,.\,\lambda_3^* z\,.\,\mathsf{S}\,(\lambda_3^* v\,.\,E)(\lambda_3^* v\,.\,F) =_w$
$\lambda_3^* x\,.\,\lambda_3^* y\,.\,\mathsf{S}'\mathsf{S}\,(\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,E)(\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,F) =_w$
$\lambda_3^* x\,.\,\mathsf{S}'(\mathsf{S}'\mathsf{S})(\lambda_3^* y\,.\,\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,E)(\lambda_3^* y\,.\,\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,F) =_w$
$\mathsf{S}'(\mathsf{S}'(\mathsf{S}'\mathsf{S}))(\lambda_3^* x\,.\,\lambda_3^* y\,.\,\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,E)(\lambda_3^* x\,.\,\lambda_3^* y\,.\,\lambda_3^* z\,.\,\lambda_3^* v\,.\,F) \equiv$
$\mathsf{S}'(\mathsf{S}'(\mathsf{S}'\mathsf{S}))(\lambda_3^* xyzv\,.\,E)(\lambda_3^* xyzv\,.\,F)$. □

Az B és C kombinátorokhoz hasonlóan vezessük még be a B' és C' kombinátorokat, az új kombinátor logikát $CL^{(T)}$-vel jelöljük, a T kitevő Turner nevére utal.

2.5.11. Definíció. A $\boldsymbol{CL^{(T)}}$ kombinátor logika konstansai:

‖ < *konstans* > ::= K | S | B | C | S' | B' | C'

Az új kombinátorokra vonatkozó *konverziós szabályok* legyenek a következők:

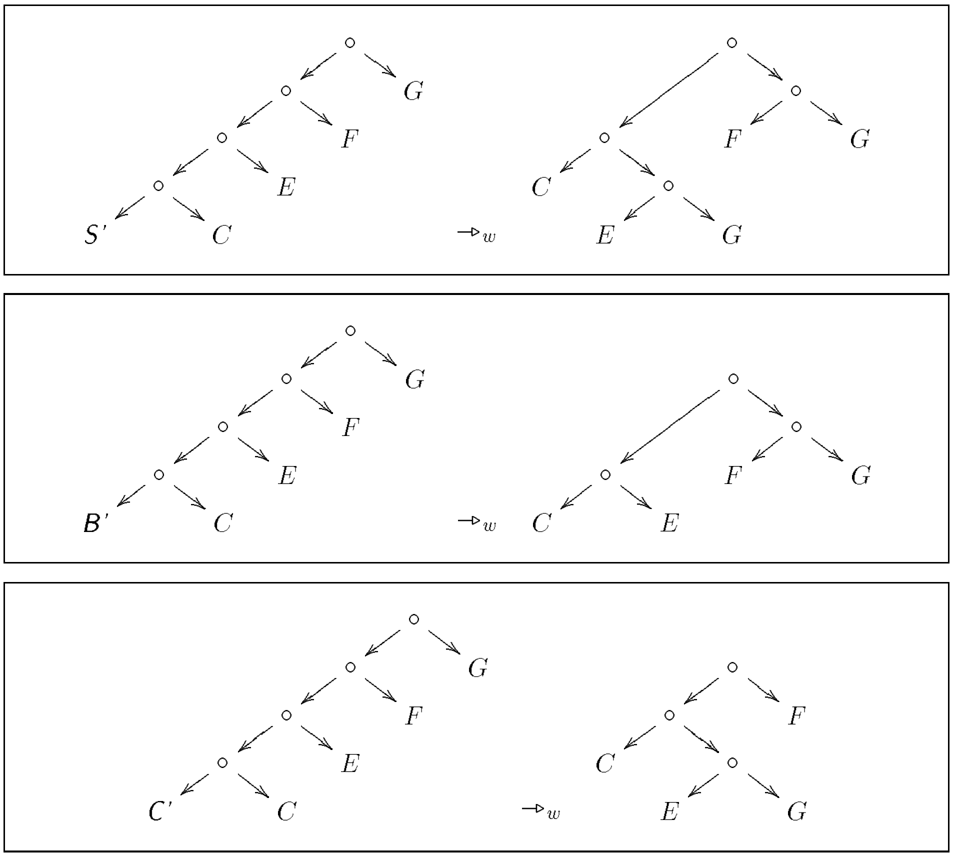
2.5.12. Definíció. A $\boldsymbol{CL^{(T)}}$ kombinátor logika új gyenge redukciói:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{S}'C\ EFG \rhd_w C\ (EG)(FG), & C \in \mathcal{C}^0, \\ \mathsf{B}'C\ EFG \rhd_w C\ E(FG), & C \in \mathcal{C}^0, \\ \mathsf{C}'C\ EFG \rhd_w C\ (EG)F, & C \in \mathcal{C}^0. \end{array}$$

A S' kombinátor az $\mathsf{S}'C\ \ EF$ függvény G argumentumát „átadja” mind az E, mind az F függvénynek, a B' kombinátor a B kombinátorhoz hasonlóan függvény-kompozíciót végez, a C' pedig a C-hez hasonlóan, felcseréli az argumentumokat, vagy az E és F mindegyikét függvénynek tekintve, a G argumentumot az E-hez, az „eggyel balra levő” függvényhez viszi át (2.8. ábra).

Határozzunk meg néhány optimalizáló újraírási szabályt. Az

$\mathsf{S}'C\ (\mathsf{K}E)FG \ \rhd_w\ C\ (\mathsf{K}EG)(FG) \ \rhd_w\ C\ E(FG)$,
$\mathsf{B}'C\ EFG \ \rhd_w\ C\ E(FG)$



2.8. ábra. Az S', B' és C' kombinátorok gráf-újraírási szabálya

és

$$S'C\ E(KF)G \rightarrow_w C\ (EG)(KFG) \rightarrow_w C\ (EG)F,$$
$$C'C\ EFG \rightarrow_w C\ (EG)F$$

egyenletekből a következő két optimalizáló újraírási szabályt kapjuk:

- $\mathsf{S}'C\ (\mathsf{K}E)F \mapsto \mathsf{B}'C\ EF$,
- $\mathsf{S}'C\ E(\mathsf{K}F) \mapsto \mathsf{C}'C\ EF$.

Könnyen bizonyíthatók a következő szabályok is:

- $\mathsf{S}(\mathsf{B}C\ E)F \quad \mapsto \mathsf{S}'C\ EF$,
- $\mathsf{S}(\mathsf{K}C\ E)F \quad \mapsto \mathsf{B}'C\ EF$,
- $\mathsf{S}(\mathsf{B}C\ E)(\mathsf{K}F) \mapsto \mathsf{C}'C\ EF$,
- $\mathsf{B}(C\ E)F \quad \mapsto \mathsf{B}'C\ EF$,
- $\mathsf{B}E\mathsf{I} \quad \mapsto E$,
- $\mathsf{C}(\mathsf{B}C\ E)F \quad \mapsto \mathsf{C}'C\ EF$.

Az újraírási szabályok felhasználásával azonnal látható, hogy a $CL^{(T)}+ext$ kombinátor logikában

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}' &\equiv \mathsf{B}(\mathsf{B}\mathsf{S})\mathsf{B}\\
\mathsf{B}' &\equiv \mathsf{B}\mathsf{B}\\
\mathsf{C}' &\equiv \mathsf{B}(\mathsf{B}\mathsf{C})\mathsf{B}
\end{aligned}$$

Ha a λ_3^* absztakcióba beépítjük az optimalizációkat, akkor a λ_4^* absztrakciós algoritmust kapjuk meg.

2.5.13. Definíció. A λ_4^* absztrakciós algoritmus:

A $\lambda_4^* x\,.\,E$ kifejezést az E szerkezete szerint definiáljuk:

$$\begin{array}{lll}
\lambda_4^* x\,.\,x & \equiv \mathsf{I} & \\
\lambda_4^* x\,.\,E & \equiv \mathsf{K}E, & \textit{ha } x \notin FV(E),\\
\lambda_4^* x\,.\,Ex & \equiv E, & \textit{ha } x \notin FV(E),\\
\lambda_4^* x\,.\,EFG & \equiv \mathsf{B}'EF(\lambda_4^* x\,.\,G), & \textit{ha } x \notin \{FV(E)\cup FV(F)\},\\
\lambda_4^* x\,.\,EFG & \equiv \mathsf{C}'E(\lambda_4^* x\,.\,F)G, & \textit{ha } x \notin \{FV(E)\cup FV(G)\},\\
\lambda_4^* x\,.\,EFG & \equiv \mathsf{S}'E(\lambda_4^* x\,.\,F)(\lambda_4^* x\,.\,G), & \textit{ha } x \notin FV(E),\\
\lambda_4^* x\,.\,EF & \equiv \mathsf{B}E(\lambda_4^* x\,.\,F), & \textit{ha } x \notin FV(E),\\
\lambda_4^* x\,.\,EF & \equiv \mathsf{C}(\lambda_4^* x\,.\,E)F, & \textit{ha } x \notin FV(F),\\
\lambda_4^* x\,.\,EF & \equiv \mathsf{S}(\lambda_4^* x\,.\,E)(\lambda_4^* x\,.\,F), & \textit{egyébként.}
\end{array}$$

Ha egy CL-kifejezés hossza m, és n változót tartalmaz, akkor a változókkal a λ_4^* absztrakciós algoritmust elvégezve $\Theta(mn)$ hosszú kifejezést kapunk.

Az S' kombinátor szerepét már láttuk, most megmutatjuk a B' és a C' hasznosságát.

2.5.14. Példa. *(A B' és a C' kombinátor)*
Ha az EF kifejezésben $x_i \notin FV(E)$ $(i = 1, \ldots, k)$, akkor

$$\lambda_4^* x_1 x_2 \ldots x_k \,.\, EF =_w$$
$$\mathsf{B}'(\mathsf{B}'(\ldots(\mathsf{B}'\mathsf{B})\ldots))E(\lambda_4^* x_1 x_2 \ldots x_k \,.\, F),$$

ez utóbbi kifejezésben pontosan k darab B' kombinátor van. Látható tehát, hogy csak a második tagra kell az absztrakciókat elvégezni.

Hasonlóan, ha az EF kifejezésben $x_i \notin FV(F)$ $(i = 1, \ldots, k)$, akkor

$$\lambda_4^* x_1 x_2 \ldots x_k \,.\, EF =_w$$
$$\mathsf{C}'(\mathsf{C}'(\ldots(\mathsf{C}'\mathsf{C})\ldots))(\lambda_4^* x_1 x_2 \ldots x_k \,.\, E)F. \qquad \square$$

2.5.3. További kombinátorok

A fentieken kívül, elsősorban a CL-kifejezések hosszának csökkentésére, még sok kombinátort definiáltak, amelyek adott, speciális felépítésű CL-kifejezések absztrakcióiban nagyon jól használhatók.

Ilyen például a J és a J' kombinátor, amit M. S. Joy vezetett be 1985-ben:

$$\mathsf{J}EFG \quad \triangleright_w \; EF,$$
$$\mathsf{J}'EFGH \; \triangleright_w \; EFG.$$

A λ_4^* absztrakciós algoritmus ezzel a két új kombinátorral a következőképpen módosítható:

2.5.15. Definíció. A λ_J^* absztrakciós algoritmus:

A $\lambda^*_J x \,.\, E$ *kifejezést az* E *szerkezete szerint definiáljuk:*

$$
\begin{array}{lll}
\lambda^*_J x \,.\, x & \equiv \mathsf{I} & \\
\lambda^*_J x \,.\, E & \equiv \mathsf{K}\, E, & \text{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda^*_J x \,.\, Ex & \equiv E, & \text{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda^*_J x \,.\, EFG & \equiv \mathsf{J'}\, EF(\lambda^*_J x \,.\, G), & \text{ha } x \notin \{FV(E) \cup FV(F) \cup FV(G)\}, \\
\lambda^*_J x \,.\, EFG & \equiv \mathsf{B'}\, EF(\lambda^*_J x \,.\, G), & \text{ha } x \notin \{FV(E) \cup FV(F)\}, \\
\lambda^*_J x \,.\, EFG & \equiv \mathsf{C'}\, E(\lambda^*_J x \,.\, F)G, & \text{ha } x \notin \{FV(E) \cup FV(G)\}, \\
\lambda^*_J x \,.\, EFG & \equiv \mathsf{S'}\, E(\lambda^*_J x \,.\, F)(\lambda^*_J x \,.\, G), & \text{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda^*_J x \,.\, EF & \equiv \mathsf{J}\, E(\lambda^*_J x \,.\, F), & \text{ha } x \notin FV(E) \cup FV(F), \\
\lambda^*_J x \,.\, EF & \equiv \mathsf{B}\, E(\lambda^*_J x \,.\, F), & \text{ha } x \notin FV(E), \\
\lambda^*_J x \,.\, EF & \equiv \mathsf{C}\, (\lambda^*_J x \,.\, E)F, & \text{ha } x \notin FV(F), \\
\lambda^*_J x \,.\, EF & \equiv \mathsf{S}\, (\lambda^*_J x \,.\, E)(\lambda^*_4 x \,.\, F), & \text{egyébként.}
\end{array}
$$

Joy eredeti absztrakciójában nem szerepelt a K kombinátor, mivel

- $\mathsf{J}\,\mathsf{I}\,EF \mapsto E$,

és ezért Joy a fenti absztrakciós algoritmus második sorát a

$$\lambda^*_J x \,.\, E \quad \equiv \quad \mathsf{J}\,\mathsf{I}\, E, \quad \text{ha } x \notin FV(E)$$

alakban adta meg.

Ha egy CL-kifejezés hossza m, és n változót tartalmaz, akkor a változókkal a λ^*_J absztrakciós algoritmust elvégezve $O(m(2n+1))$ hosszú kifejezést kapunk.

J. B. Rosser is definiált 1935-ben egy J nevű kombinátort:

$$JEFGH \twoheadrightarrow_w EF(EHG)$$

Ennek a J kombinátornak egy fontos tulajdonsága az, hogy az $\{\mathsf{I}, \mathsf{J}\}$ halmaz a kombinátor logika egy bázisát (2.6. pont) adja. Megjegyezzük, hogy ebben a bázisban például az S kombinátor kifejezése a zárójeleket nem számítva 266 szimbólumot, azaz összesen 266 darab I és J kombinátort tartalmaz.

Megemlítjük még a W kombinátort, amit *duplikátor* kombinátornak nevezünk:

$$WEF \twoheadrightarrow_w EFF$$

A W kombinátorra

$$\begin{aligned} W &\equiv SS(KI) \\ &\equiv SS(SK) \\ &\equiv CSI, \end{aligned}$$

és például

- $SEI \mapsto WE$.

Szintén J. B. Rosser vezette be a C_* kombinátort, ami a

$$C_* EF \twoheadrightarrow_w FE$$

transzformációt végzi. Ezzel a kombinátorral

$$\begin{aligned} C_* &\equiv JII, \\ C_* &\equiv CI, \\ C &\equiv JC_*(JC_*)(JC_*), \\ B &\equiv C(JIC)(JI), \\ W &\equiv C(C(BC(C(BJC_*)C_*))C_*). \end{aligned}$$

1986-ban M. Sheevel definiálta a B^* kombinátort, melyre

$$B^* CEFG \twoheadrightarrow_w C(E(FG)).$$

A λ^*_J absztrakciós algoritmusba ekkor a

$$\lambda^*_J x\,.\,E(FG) \equiv B^* EF(\lambda^*_J x\,.\,G), \quad ha \quad x \notin \{FV(E) \cup FV(F)\}$$

építhető be.

Erre a kombinátorra két optimalizáló újraírási szabály használható:

- $S(KC)(BEF) \mapsto B^* CEF$
- $BC(BEF) \quad \mapsto B^* CEF$

2.6. Bázis

A 2.1.1. definíció szerint az egyszerű kombinátor logika kifejezései csak a K és S konstansokat tartalmazhatják, és ezeket a kombinátorokat az egyszerű kombinátor logika bázisának neveztük.

2.6.1. Definíció. Az egyszerű kombinátor logika kifejezéseinek bázisa:

Legyen $\mathcal{C}_b \subset \mathcal{C}$. A $\mathcal{C}_b$ halmaz a $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ halmaz bázisa, ha minden $E \in \mathcal{C}'$-re van olyan $F \in (\mathcal{C}_b)^+$, melyre $E =_w F$.
A $\mathcal{C}^0$ halmaz bázisát a kombinátor logika bázisának nevezzük.

A fentiek szerint tehát az egyszerű kombinátor logika bázisa a két elemű $\{K, S\}$ halmaz, hiszen minden $E \in \mathcal{C}^0$-ra $E \in \{K, S\}^+$. Hasonlóan, a $CL^{(C)}$ kombinátor logika bázisa a $\{K, S, B, C\}$ halmaz, a $CL^{(T)}$ kombinátor logika bázisa pedig $\{K, S, B, C, S', B', C'\}$.

Láttuk, hogy ezeknek a bázisoknak az elemei kifejezhetők a K és S kombinátorokkal, így ezekhez a kombinátor logikákhoz is választható a $\{K, S\}$ halmaz bázisként.

M. Schönfinkel 1924-ben a kombinátor logika bázisának a $\{B, C, I, K, S\}$ halmazt választotta, bár a bázis kombinátorait nem így, hanem rendre Z, T, I, C, S-nek nevezte. Azt is megmutatta, hogy a B, C és I kombinátorok kifejezhetők a K és S kombinátorokkal.

Haskell B. Curry 1927-ben, Schönfinkel dolgozatainak ismerete nélkül, a kombinátor logika bázisának a $\{B, C, W, I\}$ halmazt határozta meg. Amikor Schönfinkel munkáit megismerte, a K kombinátorral azonnal kibővítette a rendszerét, de az S kombinátornak nem sok jelentőséget tulajdonított. Az S kombinátor igazi szerepét a zárójeles absztrakciók kidolgozása hozta meg. Az S kombinátor ebben a rendszerben a következő:

$S \equiv B(BW)(BBC)$.

A három bázis közötti kapcsolatot a 2.9. ábra mutatja.

	$\{K,S\}$	*Schönfinkel* $\{B,C,I,K,S\}$	*Curry* $\{B,C,W,I,K\}$
K	K	K	K
S	S	S	$B(BW)(BBC)$
I	SKK	I	I
B	$S(KS)K$	B	B
C	$S(S(KS)(S(KK)S))(KK)$	C	C
W	$SS(SK)$	CSI	W

2.9. ábra. Bázisok összehasonlító táblázata

Most megmutatjuk, hogy van olyan CL-kifejezés, amellyel mind a K, mind az S leírható, azaz a kombinátor logikának van egyelemű bázisa is, sőt, mint látni fogjuk, több ilyen egyelemű bázis is létezik. Mivel az egyelemű bázisokkal is leírhatóak a különböző kombinátor logikák kombinátorai, megállapíthatjuk, hogy a különböző kombinátor logikák között csak *szintaktikai* különbség van. Így tehát a továbbiakban elegendő csak egy kiválasztott bázisú kombinátor logikával foglalkoznunk, ez a bázis legyen az $\{S, K\}$ halmaz. A kifejezések egyszerűbb leírására ezt a halmazt még kibővíthetjük az I kombinátorral.

Legyen

$$X_1 \equiv S(S(SI(KK))(KS))(KK),$$

és megmutatjuk, hogy $K = X_1X_1X_1$ és $S = X_1(X_1X_1)$, azaz az $\{X_1\}$ egy egyelemű bázis.

Az egyszerűbb számolás érdekében optimalizáljuk a X_1 kifejezést:

$$X_1 \equiv S(S(\underline{SI(KK)})(KS))(KK) \mapsto$$
$$S(\underline{S(CIK)(KS)})(KK) \mapsto$$
$$\underline{S(C(CIK)S)(KK)} \mapsto$$

$C(C(CIK)S)K$.

Ezzel a kifejezéssel

$X_1X_1 \equiv \underline{C(C(CIK)S)KX_1} \;\rhd_w$
$\underline{C(CIK)SX_1}\,K \;\rhd_w$
$\underline{CIKX_1}\,SK \;\rhd_w$
$\underline{IX_1}\,KSK \;\rhd_w$
$X_1\;KSK \equiv$
$\underline{C(C(CIK)S)KK}SK \;\rhd_w$
$\underline{C(CIK)SK}KSK \;\rhd_w$
$\underline{CIKK}SKSK \;\rhd_w$
$\underline{IK}KSKSK \;\rhd_w$
$\underline{KKS}KSK \;\rhd_w$
$\underline{KKS}K \;\rhd_w$
KK,

így

$X_1X_1X_1 \;\equiv$
$\underline{KKX_1} \;\rhd_w$
K,

és

$X_1(X_1\,X_1) \equiv$
$\underline{C(C(CIK)S)K(KK)} \;\rhd_w$
$\underline{C(CIK)S(KK)}K \;\rhd_w$
$\underline{CIK(KK)}SK \;\rhd_w$
$\underline{I(KK)}KSK \;\rhd_w$
$\underline{KKK}SK \;\rhd_w$
$\underline{KSK} \;\rhd_w$

S.

Könnyen belátható, hogy a következő X_2, X_3, X_4 és X_5 CL-kifejezések is egyelemű bázisokat alkotnak:

$X_2 \equiv S(S(SI(K^3\,K))(KK))(K^2\,S)$,

amelyre $X_2X_2 \twoheadrightarrow_w^+ S$ és $X_2S \twoheadrightarrow_w^+ K$,

$X_3 \equiv S(SI(S(SI(KS))(K^4\,I)))(KK)$,

amelyre $X_3X_3X_3 \twoheadrightarrow_w^+ K$ és $X_3K \twoheadrightarrow_w^+ S$,

$X_4 \equiv S(SI(S(SI(KS))(K^2\,K)))(KK)$,

amelyre $X_4X_4X_4 \twoheadrightarrow_w^+ K$ és $X_4K \twoheadrightarrow_w^+ S$,

$X_5 \equiv C(CIS)K$,

amelyre $X_5^3X_5 \twoheadrightarrow_w^+ K$ és $X_5^4X_5 \twoheadrightarrow_w^+ S$.

2.7. Konstansok és konstans függvények

A λ-kalkulushoz hasonlóan, a kombinátor logikában is van arra lehetőség, hogy konstansokat, konstans függvényeket definiáljunk, az egyszerű típusnélküli kombinátor logika egyes CL-kifejezéseit konstansoknak és a konstansokon értelmezett függvényeknek tekinthetjük. Ezekre a CL-kifejezésekre a szokásos aritmetikai, logikai tulajdonságok is teljesülnek.

2.7.1. A logikai konstansok és műveletek

A logikai konstansoknak a következő CL-kifejezéseket feleltethetjük meg:

$\mathit{true} \equiv K$,

$\mathit{false} \equiv KI$.

Az *if* nevű *if-then-else* CL-kifejezést az

$\mathsf{if} \equiv EFG$

alakban definiálhatjuk, ahol E a **true** vagy **false** értékű feltétel, F és G pedig a *then-ág* és az *else-ág* CL-kifejezései.

2.7.1. Példa. *(Az* **if true** EF *applikáció az* E *kifejezésre, az* **if false** EF *pedig az* F*-re redukálható)*

$\mathsf{if\ true}\ EF \equiv$

$\mathsf{true}\ EF \equiv$

$\underline{\mathsf{K}EF} \rightharpoonup_w E,$

$\mathsf{if\ false}\ EF \equiv$

$\mathsf{false}\ \ EF \equiv$

$\underline{\mathsf{KI}E}F \rightharpoonup_w$

$\underline{\mathsf{I}F} \rightharpoonup_w F.$ □

Használva az imperatív nyelvekből jól ismert *optimalizált kiértékelés* módszerét, meghatározzuk a logikai függvények CL-kifejezéseit.

$\mathsf{and}\ EF \approx \mathsf{if}\ EF\ \mathsf{false}\ \equiv$

$EF\ \mathsf{false},$

$\mathsf{or}\ EF \approx \mathsf{if}\ E\ \mathsf{true}\ F \equiv$

$E\ \mathsf{true}\ F,$

és hasonlóan

$\mathsf{not}\ E\ \approx \mathsf{if}\ E\ \mathsf{false\ true}\ \equiv$

$E\ \mathsf{false\ true}.$

Ezekből pedig például a λ_4^* zárójeles absztrakcióval

$\mathsf{and}\ \equiv \lambda_4^* yx.xy\ \mathsf{false} \equiv \ldots \equiv$

$\mathsf{C'C(CI)(KI)},$

$\mathsf{or}\ \equiv \lambda_4^* xy.x\ \mathsf{true}\ y \equiv \ldots \equiv$

CIK,

$\mathit{not} \equiv \lambda_4^* x.x\ \mathit{false}\ \mathit{true} \equiv \ldots \equiv$
$C(CI(KI))K$.

2.7.2. Példa. *(and false true)*

$\mathit{and}\ \mathit{false}\ \mathit{true}\ \equiv$
$\underline{C'C(CI)(KI)(KI)K} \rightarrow_w$
$\underline{C(CI(KI))(KI)K} \rightarrow_w$
$\underline{CI(KI)K}(KI) \rightarrow_w$
$\underline{IK}(KI)(KI) \rightarrow_w$
$\underline{K(KI)(KI)} \rightarrow_w$
KI. □

2.7.3. Példa. *(not false)*

$\mathit{not}\ \mathit{false} \equiv \underline{C(CI(KI))K(KI)} \rightarrow_w$
$\underline{CI(KI)(KI)}K \rightarrow_w$
$I(KI)(KI)K \rightarrow_w$
$\underline{I(KI)}(KI)K \rightarrow_w$
$\underline{KI(KI)}K \rightarrow_w$
$\underline{IK} \rightarrow_w$
K □

2.7.2. Listák és listákon értelmezett műveletek

A *láncolt lista* adatszerkezetkonstruktorának, a fejelem és maradék rész szelektoroknak a következő CL-kifejezéseket feleltethetjük meg:

$$\begin{aligned} \mathit{cons} &\equiv BC(CI), \\ \mathit{head} &\equiv CIK, \\ \mathit{tail} &\equiv CI(KI). \end{aligned}$$

2.7.4. Példa. *(Az $\{E_3, E_2, E_1\}$ lista fejeleme)*

A lista konstruktor CL-kifejezését felhasználva az $\{E_3, E_2, E_1\}$ lista a következő:

$\mathsf{cons}\, E_3(\mathsf{cons}\ E_2E_1) \equiv$
$\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)$,

és ennek fejeleme

$\underline{\mathsf{C\,I\,K}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1))} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{I}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1))}\mathsf{K} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)\mathsf{K} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{C(C\,I}E_3)(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)\mathsf{K}} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{C\,I}E_3\mathsf{K}}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1) \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{I\,K}}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1) \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{K}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)} \rightarrow_w$
E_3. □

2.7.5. Példa. *(Az $\{E_3, E_2, E_1\}$ lista maradék része)*

Az előző példában is szereplő lista maradékrésze a következő:

$\underline{\mathsf{C\,I(K\,I)}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1))} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{I}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1))}\mathsf{(K\,I)} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{B\,C(C\,I)}E_3}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)\mathsf{(K\,I)} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{C(C\,I}E_3)(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)\mathsf{(K\,I)}} \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{C\,I}E_3\mathsf{(K\,I)}}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1) \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{I(K\,I)}}E_3(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1) \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{K\,I}E_3}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1) \rightarrow_w$
$\underline{\mathsf{I}(\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1)} \rightarrow_w$
$\mathsf{B\,C(C\,I)}E_2E_1 \equiv$
$\mathsf{cons}\, E_2E_1 \equiv \{E_2, E_1\}$. □

2.7.3. A számkonstansok és aritmetikai műveletek

A kombinátor logikában is könnyen definiálható egy normált, adekvát számjegyendszer. Legyen

$$\begin{aligned} \mathsf{c_0} &\equiv \mathsf{K\,I}, \\ \mathsf{succ} &\equiv \mathsf{S\,B}, \\ \mathsf{zero} &\equiv \mathsf{C\,(C\,I\,(true\ false))\,true}, \end{aligned}$$

de a *pred* egy kissé bonyolult:

$$\mathsf{pred} \equiv \mathsf{C(C(CI(S(B\,C(CI))(SB)(CI)(KI)))(C(CI(KI))(KI)))K}.$$

Az n szám CL-kifejezését jelöljük c_n-nel, vagy röviden $\overline{n}$-nel.

2.7.6. Példa. *(Ebben a számjegyrendszerben a számok tehát a következők)*

$$\begin{aligned} \overline{0} &\equiv & &\mathsf{K\,I}, \\ \overline{1} &\equiv \mathsf{succ}\ \ulcorner 0 \urcorner \equiv & &\mathsf{S\,B(K\,I)}, \\ \overline{2} &\equiv \mathsf{succ}\ \ulcorner 1 \urcorner \equiv & &(\mathsf{S\,B})^2(\mathsf{K\,I}), \\ \overline{3} &\equiv \mathsf{succ}\ \ulcorner 2 \urcorner \equiv & &(\mathsf{S\,B})^3(\mathsf{K\,I}), \\ \ldots & & &\ldots \end{aligned}$$

□

A természetes számok fenti kombinátorait *iterátoroknak* is nevezhetjük, mivel a $\mathsf{c}_n EF$ CL-kifejezés normál formája egy olyan $E(E(\ldots(E)\ldots))F \equiv E^n F$ CL-kifejezés, amelyben az E pontosan n-szer szerepel, azaz az E-t pontosan n-szer alkalmazzuk az F kifejezésre.

2.7.7. Példa. *(A $\mathsf{c_2}$ EF kifejezés)*

$\mathsf{c_2}\ EF \equiv$

$(\mathsf{S\,B})^2(\mathsf{K\,I}) \equiv$

$\underline{\mathsf{S\,B(S\,B(K\,I))}EF} \rightarrow_w$

$\underline{\mathsf{B}\,E(\mathsf{S\,B(K\,I)}E)F} \rightarrow_w$

$E(\underline{SB(KI)EF}) \rightarrow_w$
$E(BE(\underline{KIE})F) \rightarrow_w$
$E(\underline{BEIF}) \rightarrow_w$
$E(E(\underline{IF})) \rightarrow_w$
$E(EF)$. □

2.7.8. Példa. $(\mathit{zero}\ c_0 \rightarrow_w^+ \mathit{true}$ *és* $\mathit{zero}\ c_2 \rightarrow_w^+ \mathit{false})$

$\mathit{zero}\ c_0 \equiv$
$\underline{C(CI(\mathit{true}\ \mathit{false}))\mathit{true}\ c_0} \rightarrow_w$
$\underline{CI(\mathit{true}\ \mathit{false})c_0}\mathit{true} \rightarrow_w$
$\underline{Ic_0}(\mathit{true}\ \mathit{false})\mathit{true} \rightarrow_w$
$c_0(\mathit{true}\ \mathit{false})\mathit{true} \equiv$
$\underline{KI(\mathit{true}\ \mathit{false})}\mathit{true} \rightarrow_w$
$\underline{I\mathit{true}} \rightarrow_w$
true,

és

$\mathit{zero}\ c_2 \equiv$
$\underline{C(CI(\mathit{true}\ \mathit{false}))\mathit{true}\ c_2} \rightarrow_w$
$\underline{CI(\mathit{true}\ \mathit{false})c_2}\mathit{true} \rightarrow_w$
$\underline{Ic_2}(\mathit{true}\ \mathit{false})\mathit{true} \rightarrow_w$
$c_2(\mathit{true}\ \mathit{false})\mathit{true} \equiv$
$\underline{SB(SB(KI))(\mathit{true}\ \mathit{false})}\mathit{true} \rightarrow_w$
$\underline{B(\mathit{true}\ \mathit{false})(SB(KI)(\mathit{true}\ \mathit{false}))\mathit{true}} \rightarrow_w$
$\mathit{true}\ \mathit{false}(SB(KI)(\mathit{true}\ \mathit{false})\mathit{true}) \equiv$
$\underline{K\mathit{false}(SB(KI)(\mathit{true}\ \mathit{false})\mathit{true})} \rightarrow_w$
false. □

Hasonlóan a λ-kalkulushoz, a kombinátor logikában is megadhatók az összeadás, szorzás és hatványozás műveletek CL-kifejezései. Ha c_i és c_j a műveletek két operandusa, $\mathsf{exp}\, \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j$ a $c_i^{c_j}$ értékét jelöli, akkor

$\mathsf{add}\, \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j \equiv \mathsf{S}'\, \mathsf{B}\, \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j,$

$\mathsf{mul}\, \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j \equiv \mathsf{B}\, \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j,$

$\mathsf{exp}\ \ \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j \equiv \mathsf{c}_j \mathsf{c}_i.$

Könnyen belátható, hogy a természetes számoknak megfeleltetett CL-kifejezésekre ezek a műveletek éppen a megfelelő aritmetikai művelet eredményének megfelelő szám CL-kifejezését adják.

2.7.9. Példa. *(A c_i és a c_j összeadásának eredménye c_{i+j})*

$\mathsf{add}\ \ \mathsf{c}_i \mathsf{c}_j \equiv \mathsf{S}'\, \mathsf{B}\, ((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^i (\mathsf{K}\, \mathsf{I}))((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^j (\mathsf{K}\, \mathsf{I})),$

és ha ennek a kifejezésnek az E és az F a két operandusa, akkor eredményül egy olyan kifejezést kapunk, amelyben az F-re az E-t pontosan $i + j$-szer applikáljuk.

$$
\begin{aligned}
&\underline{\mathsf{S}'\, \mathsf{B}\, ((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^i (\mathsf{K}\, \mathsf{I}))((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^j (\mathsf{K}\, \mathsf{I}))E}F \ \rhd_w\\
&\underline{\mathsf{B}\, ((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^i (\mathsf{K}\, \mathsf{I})E)((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^j (\mathsf{K}\, \mathsf{I})E)F} \ \rhd_w\\
&((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^i (\mathsf{K}\, \mathsf{I})E)\underline{((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^j (\mathsf{K}\, \mathsf{I})EF)} \ \rhd_w^+\\
&\underline{((\mathsf{S}\, \mathsf{B})^i (\mathsf{K}\, \mathsf{I})E)(E^j F)} \ \rhd_w^+\\
&E^i(E^j F) \equiv\\
&E^{i+j} F.
\end{aligned}
$$

□

2.7.4. A konstansos kombinátor logika

Ha az egyszerű kombinátor logikát kibővítjük a most definiált konstansokkal és a konstansokon értelmezett műveletekkel, akkor *konstansos kombinátor logikáról* beszélünk. Az 2.1.1. definícióban meghatározott egyszerű CL-kifejezések tehát a következőképpen bővíthetők:

2.7.10. Definíció. A konstansos kombinátor logika kifejezései:

Tegyük fel, hogy adott egy nem feltétlenül véges, egymástól páronként különböző változókat (szimbólumokat), a K *és* S *konstansokat, a logikai és számkonstansokat, az ezeken értelmezett műveleteket, valamint a nyitó- és csukózárójelet tartalmazó halmaz. Ezen a halmazon, mint ábécén értelmezett kombinátor logikai kifejezések a következő szavak:*

$$
\begin{array}{lcl}
<\textit{kifejezés}> & ::= & <\textit{változó}> \\
 & | & <\textit{konstans}> \\
 & | & <\textit{applikáció}> \\
<\textit{konstans}> & ::= & \mathsf{K} \mid \mathsf{S} \\
 & | & <\textit{számkonstans}> \\
 & | & <\textit{logikai konstans}> \\
 & | & <\textit{művelet}> \\
<\textit{applikáció}> & ::= & (\ <\textit{kifejezés}>\ <\textit{kifejezés}>\ )
\end{array}
$$

A CL-kifejezések könnyebben és kényelmesebben írhatók és olvashatók, ha a kombinátor logika beépített, előre definiált konstansokat, és az ezeken a konstansokon értelmezett előre definiált függvényeket tartalmaz. Ezért a továbbiakban a számkonstansokat leíró CL-kifejezéseket a reprezentált számkonstanssal, a függvényeket a szokásos műveleti jelekkel jelölhetjük, tehát például $\mathsf{c_0}$ helyett 0-t, az ***add*** helyett a $+$ jelet is írhatjuk.

2.7.11. Példa. *(Matematikai kifejezések a konstansos kombinátor logikában)*

Felhasználva a zárójeles absztrakció applikációjának azt a tulajdonságát, hogy (2.4.5. tétel)

$$(\lambda^* x \,.\, E)F \ \twoheadrightarrow_w^+ \ E[x := F],$$

a konstansos kombinátor logika lehetőséget ad a matemetikai kifejezések CL-kifejezésekkel történő egyszerű leírására.

mat. kif.	*funk. kif.*	*CL-kifejezés*
1	1	$K1$
x	x	I
$x+1$	$+\ x\ 1$	$C+\ 1$
$1+x$	$+\ 1\ x$	$+1$
$x+y$	$+\ x\ y$	$+$
$2x$	$*\ 2\ x$	$B(*\ 2\ I) \ \mapsto\ *\ 2$
x^2	$*\ x\ x$	$S*\ I \ \mapsto\ W*$
x^2+2x+1	$+\ (+\ (*\ x\ x)(*\ 2\ x))\ 1$	$C'+(S'+\ (W*)(*\ 2))\ 1$

□

2.8. Rekurzió, rekurzív függvények

Az **??**. pontban láttuk, hogy a λ-kalkulusban a rekurzív függvények az Y fixpont kombinátor felhasználásával rekurzió nélkül leírhatók. Hasonló mondható el a kombinátor logikára is, ezzel foglalkozunk a következőkben.

2.8.1. A fixpont kombinátor

Könnyen belátható, hogy egy E CL-kifejezés fixpontját az

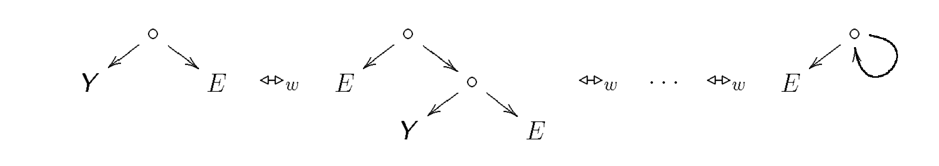
$$Y \equiv S(CB(SII))(CB(SII))$$

kombinátor előállítja:

$$YE \equiv \underline{S(CB(SII))(CB(SII))E} \rightarrow_w$$
$$\underline{CB(SII)E}(CB(SII)E) \rightarrow_w$$
$$\underline{BE(SII)(CB(SII)E)} \rightarrow_w$$
$$E(\underline{SII(CB(SII)E)}) \rightarrow_w$$
$$E(\underline{I(CB(SII)E)}(I(CB(SII)E))) \rightarrow_w$$
$$E(CB(SII)E(\underline{I(CB(SII)E)})) \rightarrow_w$$
$$E(\underline{CB(SII)}\underline{E}(\underline{CB(SII)}\underline{E})) \leftarrow_w$$

$E(S(CB(SII))(CB(SII))E) \equiv$
$E(YE)$.

Ezt a kombinátort H. B. Curry vezette le a Russel paradoxonból (lásd 2.8.2. pont), a redukció gráf-újraírási szabálya a 2.10.. ábrán látható.



2.10. ábra. Az Y kombinátor gráf-újraírási szabálya

Az Y kombinátor CL-kifejezése a K és S kombinátorokkal a következő:

$$\begin{aligned} Y \quad \equiv \quad & S(S(S(KS)(S(KK)I))(K(SII))) \\ & (S(S(KS)(S(KK)I))(K(SII))). \end{aligned}$$

A λ-kalkulusbeli Θ Turing fixpont kombinátor megfelelője a következő CL-kifejezés:

$$\Theta \equiv (B(SI)(SII))(B(SI)(SII)),$$

erre a fixpont kombinátorra az is teljesül, hogy

$$\Theta E \ \twoheadrightarrow_w^+ \ E(\Theta E).$$

A λ-kalkulushoz hasonlóan, az Y kombinátort is felhasználhatjuk a rekurzív függvények rekurzió nélküli leírására.

2.8.1. Példa. *(A fac függvény leírása)*
Az **??**. pontban láttuk, hogy a

$$fac(n) = if \ (n = 0) \ then \ 1 \ else \ (n * fac(n-1))$$

függvény definícióját a λ-kalkulus jelöléseivel átírva

$\mathsf{fac} \equiv \lambda n\,.\,\mathsf{if}\ (=\ n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (\mathsf{fac}\ (-\ n\ 1))),$

és ebből

$\mathsf{fac} \equiv \mathsf{Y}\,(\lambda f n\,.\,\mathsf{if}\ (=\ n\ 0)\ 1\ (*\ n\ f(-\ n\ 1))).$

A zárójelben levő kifejezésre a kombinátor logika λ_4^* zárójeles absztrakcióját végrehajtva a

$\mathit{fac} \equiv Y(B(S(C'\mathit{if}(C\ -\ 1)\ 1))(B(S*)(CB(C\ -\ 1))))$

kifejezést kapjuk. □

2.8.2. A Russel-paradoxon

A **??**. fejezetben láttuk, hogy a *Russel-paradoxon* leírható a λ-kalkulusban, most megmutatjuk, hogy a paradoxon leírható a kombinátor logikában is. Megadjuk paradoxon CL-kifejezését, és az Y fixpont kombinátort most is a paradoxonból vezetjük le.

Jelölje az $x \in E$ relációt az Ex kifejezés, melyre

$$Ex = \begin{cases} \textit{true}, & \text{ha } x \in B, \\ \textit{false}, & \text{ha } x \notin B. \end{cases}$$

Ha $A = \{x \mid x \notin x\}$, azaz A a „rendes” halmazok halmaza, akkor az $x \in A$ és az $x \notin x$ relációnak az

$Ax =_w \mathit{not}(xx)$

CL-kifejezés felel meg, amelyből

$Ax =_w \underline{\mathit{not}}(\underline{xx}) \leftarrow_w$
$\underline{B\,\mathit{not}}\ \underline{x}\ \underline{x} \leftarrow_w$
$W(B\,\mathit{not}\,)x.$

Tehát a kiterjesztési axióma alapján

$A =_w W(B\,\mathbf{not})$,

és ebből

$A \leftarrow_w B\,W\,B\,\mathbf{not}$.

Ha azt vizsgáljuk, hogy az A halmaz „rendes" halmaz-e, akkor most is az

$AA \;\rightarrow_w^+\; \mathbf{not}\,(AA)$

kifejezést kapjuk, amiből látható, hogy az AA a ***not*** fixpontja. Ugyanakkor

$$
\begin{aligned}
&AA \equiv \underline{B\,W\,B\,\mathbf{not}}(\underline{B\,W\,B\,\mathbf{not}}) \leftarrow_w \\
&\underline{S}\underline{(B\,W\,B)(B\,W\,B)}\,\mathbf{not} \leftarrow_w \\
&W\,S\,(B\,W\,B)\,\mathbf{not},
\end{aligned}
$$

és ha a $W\,S\,(B\,W\,B)$ kifejezést Y-nal jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$Y\,\mathbf{not} \;\rightarrow_w^+\; AA$,

azaz az AA-t az $Y\,\mathbf{not}$ határozza meg. Mivel az AA a ***not*** fixpontja, az

$Y \equiv W\,S\,(B\,W\,B)$

kifejezés egy *fixpont kombinátor*.

Az Y fixpont-kombinátor tehát a Russel-paradoxonból levezethető, és ezért nevezte Curry az Y-t paradoxon-kombinátornak.

Könnyen belátható, hogy ez a fixpont kombinátor a korábban megadott

$Y \equiv S\,(C\,B\,(S\,I\,I))(C\,B\,(S\,I\,I))$

kombinátorral ekvivalens.

2.8.3. CL-definiálható függvények

Ebben a pontban függvényen az $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ leképezést értjük, az n és m betűkkel a természetes számokat jelöljük.

Az **??** pontban foglakoztunk a λ-definiálhatósággal, most azt vizsgáljuk meg, hogy a kombinátor logikában hogyan definiálhatók a függvények. Természetesen nem meglepő, azt az eredményt kapjuk, mint a λ-kalkulusban, a parciális rekurzív függvények osztálya megegyezik a CL-definiálható függvények osztályával.

2.8.2. Definíció. CL-definiálható függvény:

Azt mondjuk, hogy az f n-változós függvény CL-definiálható, vagy kombinátorosan definiálható, ha ezt a függvényt az $F \in \mathcal{C}^0$ kombinátor reprezentálja, azaz minden $m_1, m_2, \ldots m_n$-re

$$F\,\overline{m_1}\,\overline{m_2}\ldots\overline{m_n} = \overline{f(m_1, m_2, \ldots, m_n)}.$$

Mivel a számjegyrendszer normált számjegyrendszer, ezért feltehetjük, hogy a fenti definícióban szereplő számjegyek normál formában vannak, azaz minden szám CL-kifejezésének, így a jobboldalon álló kifejezésnek is van normál formája.

Most megmutatjuk, hogy a *primitív rekurzív függvények* (**??**. definíció) CL-definiálhatók.

1. A $Z = 0$ nullváltozós nulla értékű konstans függvény CL-kifejezése:

   $$\overline{0} \;\equiv\; \mathsf{K}\,\mathsf{I}.$$

2. A $succ(x) = x + 1$ *egységgel növelő függvény* CL-kifejezése:

   $$\mathsf{succ} \;\equiv\; \mathsf{S}\,\mathsf{B}.$$

3. Az $U_i^n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m_i \;\; (1 \leq i \leq n)$ *szelektor függvény* CL-kifejezése:

   $$\lambda^* m_1 m_2 \ldots m_n \,.\, m_i.$$

4. Ha a $g, h_1, \ldots, h_p$ primitív rekurzív függvények CL-kifejezései rendre $G, H_1, \ldots, H_p$, akkor a *helyettesítéssel* definiálható

   $f(m_1, m_2, \ldots, m_n) =$
   $g(h_1(m_1, m_2, \ldots, m_n), h_2(m_1, m_2, \ldots, m_n), \ldots, h_p(m_1, m_2, \ldots, m_n))$

   primitív rekurzív függvény CL-kifejezése:

   $F \equiv \lambda^* m_1 m_2 \ldots m_n \,.\, G(H_1 m_1 m_2 \ldots m_n) \ldots (H_p m_1 m_2 \ldots m_n).$

5. A primitív rekurzió műveletét az

   $$\begin{array}{lcl} f(0, m_1, \ldots, m_n) & = & g(m_1, \ldots, m_n) \\ f(succ(m), m_1, \ldots, m_n) & = & h(m, f(m, m_1, \ldots, m_n), m_1, \ldots, m_n) \end{array}$$

   függvényekkel adtuk meg. Jelölje a g és h primitív rekurzív függvények CL-kifejezéseit G és H.

   Az f primitív rekurzív függvény CL-kifejezése megadható az Y fixpont kombinátorral is, de erre a CL-kifejezésre P. I. Bernays adott egy rekurzió mentes leírást:

   $F \equiv \lambda^* m m_1 \ldots m_n \,.\, \mathsf{R}(G m_1 \ldots m_n)(H' m_1 \ldots m_n) m,$

   ahol R egy olyan kombinátor, amelyre

   $$\begin{array}{lcl} \mathsf{R} E_1 E_2 \,\overline{0} & \twoheadrightarrow_w & E_1 \\ \mathsf{R} E_1 E_2 (\mathsf{succ}\ n) & \twoheadrightarrow_w & E_2 n (\mathsf{R} E_1 E_2 n), \end{array}$$

   és

   $H' \equiv \lambda^* m_1 \ldots m_n u v \,.\, H u v m_1 \ldots m_n.$

   A 2.4.5. tétel és az R gyenge redukcióinak az alkalmazásaival

   $F\ \overline{0}\overline{m_1} \ldots \overline{m_n} \ \twoheadrightarrow_w^+$
   $\mathsf{R}(G\overline{m_1} \ldots \overline{m_n})(H'\overline{m_1} \ldots \overline{m_n})\overline{0} \ \twoheadrightarrow_w$

$G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n}$,

és

$$\begin{array}{l}
F(\mathsf{succ}\,\overline{m})\overline{m_1}\ldots\overline{m_n} \;\; \rightarrowtriangle_w^+ \\
\mathsf{R}\,(G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})(H'\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})(\mathsf{succ}\,\overline{m}) \;\; \rightarrowtriangle_w \\
H'\overline{m_1}\ldots\overline{m_n}\,\overline{m}(\mathsf{R}\,(G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})(H'\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})\overline{m}) \;\; \leftarrowtriangle_w^+ \\
H'\overline{m_1}\ldots\overline{m_n}\,\overline{m}(F\overline{m}\,\overline{m_1}\ldots\overline{m_n}) \;\; \rightarrowtriangle_w^+ \\
H\overline{m}(F\overline{m}\,\overline{m_2}\ldots\overline{m_n})\overline{m_1}\ldots\overline{m_n},
\end{array}$$

azaz az 5. pontban leírt primitív rekurzió teljesül. Most már csak az R kombinátort kell megadnunk. Legyen

$$\mathsf{R} \equiv \lambda^* xyu\,.\,u(Qy)(P\overline{0}x)\overline{1},$$

ahol

$$\begin{array}{l}
Q \equiv \lambda^* yv\,.\,P(\mathsf{succ}\,(v\,\overline{0}))(y(v\,\overline{0})(v\,\overline{1})), \\
P \equiv \lambda^* xyz\,.\,z(\mathsf{K}y)x.
\end{array}$$

A P kombinátorról belátható, hogy

$$\begin{array}{lll}
PEF\,\overline{0} & \rightarrowtriangle_w^+ & E, \\
PEF(\mathsf{succ}\,m) & \rightarrowtriangle_w^+ & F.
\end{array}$$

Ekkor

$$\begin{array}{l}
\mathsf{R}\,E_1E_2\,\overline{0} \;\; \rightarrowtriangle_w^+ \\
\overline{0}(QE_2)(P\,\overline{0}E_1)\overline{1} \equiv \\
\mathsf{KI}(QE_2)(P\,\overline{0}E_1)\overline{1} \;\; \rightarrowtriangle_w^+ \\
P\,\overline{0}E_1\overline{1} \;\; \rightarrowtriangle_w^+ \\
E_1.
\end{array}$$

Hasonlóan az is könnyen belátható, hogy

$$\mathsf{R}\,E_1E_2(\mathsf{succ}\,n) \;\; \rightarrowtriangle_w^+$$

$E_2 n(\mathsf{R} E_1 E_2 n)$.

Tehát a primitív rekurzív függvények a fenti 1–5. pontokban megadott módszerekkel CL-definiálhatók, így a következő tételt kaptuk:

2.8.3. Tétel. (Kleene tétel)

Minden primitív rekurzív függvény CL-definiálható.

A *teljes rekurzív függvényeket* a primitív rekurzív függvények definíciójában szereplő alapfüggvényekkel, a helyettesítés, a primitív rekurzió és a *minimalizálás* műveleteivel kapjuk meg (**??**. definíció). Megmutatjuk, hogy a minimalizálás is leírható a kombinátor logikában.

6. A **??**. pontban láttuk, hogy a minimalizálás

   $$f(m_1,\ldots,m_n) = h(\mu m(g(m_1,\ldots,m_n,m)=0))$$

   függvényének megadásában szereplő $\mu m(g(m_1,\ldots,m_n,m) = 0)$ előállítható egy $min(m_1,\ldots,m_n,m)$ függvény felhasználásával, az

   $$\begin{aligned} &m = 0\ ; \\ &min(m_1,\ldots,m_n,m) \;=\; \mathit{if} \quad g(m_1,\ldots,m_n,m)=0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathit{then}\ m \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathit{else}\ min(m_1,\ldots,m_n,succ(m))\ ; \end{aligned}$$

   programmal. Ekkor tehát

   $$min(m_1,\ldots,m_n,0) = \mu m(g(m_1,\ldots,m_n,m)=0),$$

   és így

   $$f(m_1,\ldots,m_n) = h(min(m_1,\ldots,m_n,0)).$$

   Ha az f, h és a min függvény CL-kifejezése F, H és min, akkor

   $$F \equiv \lambda^* m_1 \ldots m_n\,.\,H(\mathsf{min}\ m_1 \ldots m_n \overline{0}).$$

   Most már csak a min függvénynek kell a CL-kifejezését megadnunk.

Ezt megadhatjuk az $\textsf{Y}$ fixpont kombinátor felhasználásával, de P. I. Bernays erre is kidolgozott egy rekurzió mentes leírást.

Jelölje G a g függvény CL-kifejezését. Ekkor

$\textsf{min} \equiv \lambda^* m_1 \ldots m_n m \,.\, Q(Gm_1 \ldots m_n)m,$

ahol

$$Q \equiv \lambda^* xy \,.\, Tx(xy)(Tx)y,$$
$$T \equiv \lambda^* x \,.\, P\,\overline{0}(\lambda^* uv \,.\, u(x(\textsf{succ}\; v))u(\textsf{succ}\; v)),$$
$$P \equiv \lambda^* xyz \,.\, z(\textsf{K} y)x,$$

ahol P megegyezik a primitív rekurzió 5. pontjában szereplő P kifejezéssel.

Először a Q CL-kifejezésnek azt a tulajdonságát bizonyítjuk be, hogy

$$QE_1E_2 \quad \rightarrow_w^+ \quad E_2, \qquad \text{ha } E_1E_2 =_w \overline{0},$$
$$QE_1E_2 \quad \rightarrow_w^+ \quad QE_1(\textsf{succ}\; E_2), \qquad \text{ha } E_1E_2 =_w \overline{m},\ \overline{m} \neq_w \overline{0}.$$

Megjegyezzük, hogy mindkét sor baloldalán a $(QE_1)E_2$ kifejezés van, a feltételben viszont az (E_1E_2) kifejezés szerepel.

$QE_1E_2 \equiv$
$(\lambda^* xy \,.\, Tx(xy)(Tx)y)E_1E_2 \ \rightarrow_w^+$
$TE_1(E_1E_2)(TE_1)E_2 \equiv$
$(\lambda^* x \,.\, P\,\overline{0}(\lambda^* uv \,.\, u(x(\textsf{succ}\; v))u(\textsf{succ}\; v)))E_1(E_1E_2)(TE_1)E_2 \ \rightarrow_w$
$P\,\overline{0}(\lambda^* uv \,.\, u(E_1(\textsf{succ}\; v))u(\textsf{succ}\; v))(E_1E_2)(TE_1)E_2.$

Ha $E_1E_2 = \overline{0}$, akkor a P kombinátor korábban már megadott $PEF\,\overline{0} \ \rightarrow_w^+ \ E$ redukciójának végrehajtása után

$\overline{0}(TE_1)E_2 \equiv$
$\textsf{KI}(TE_1)E_2 \ \rightarrow_w^+$

E_2,

és ha $E_1 E_2 = \overline{m}$, akkor a $PEF(\textsf{succ}\ m) \ \rhd_w^+ \ \ F$ alapján

$$
\begin{aligned}
&(\lambda^* uv\,.\,u(E_1(\textsf{succ}\ v))u(\textsf{succ}\ v))(TE_1)E_2 \ \rhd_w^+ \\
&TE_1(E_1\underline{(\textsf{succ}\ E_2)})(TE_1)\underline{(\textsf{succ}\ E_2)} \ \lhd_w \\
&(\lambda^* y\,.\,T\underline{E_1}(\underline{E_1}y)(T\underline{E_1})y)(\textsf{succ}\ E_2) \ \lhd_w \\
&(\lambda^* xy\,.\,Tx(xy)(Tx)y)E_1(\textsf{succ}\ E_2) \equiv \\
&QE_1(\textsf{succ}\ E_2).
\end{aligned}
$$

Ezzel a Q megadott tulajdonságait bebizonyítottuk.

A ***min*** függvény fenti definíciója alapján

$$
\begin{aligned}
&\textsf{min}\ \overline{m_1}\ldots\overline{m_n}\ \overline{m} \ \rhd_w^+ \\
&Q(G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})\overline{m},
\end{aligned}
$$

és felhasználva a Q tulajdonságait, ha $G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n}\ \overline{m} =_w \overline{0}$, akkor

$$Q(G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})m \ \rhd_w^+ \ \overline{m}.$$

Ellenkező esetben, azaz ha $G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n}\ \overline{m} \neq_w \overline{0}$, akkor

$$
\begin{aligned}
&Q(G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})\overline{m} \ \rhd_w^+ \\
&Q(G\overline{m_1}\ldots\overline{m_n})(\textsf{succ}\ \overline{m}) \ \lhd_w^+ \\
&\textsf{min}\ \overline{m_1}\ldots\overline{m_n}(\textsf{succ}\ \overline{m}).
\end{aligned}
$$

Megmutattuk tehát, hogy a ***min*** kifejezés valóban a *min* függvény *CL*-kifejezése.

A fenti 1–6. pontokkal a teljes rekurzív függvények *CL*-definiálhatók, így kimondhatjuk a következő tételt:

2.8.4. Tétel. (Kleene tétel)

Minden teljes rekurzív függvény CL-definiálható.

A λ-kalkulushoz hasonlóan, a *parciális rekurzív függvények* a normál formával a kombinátor logikában is definiálhatók úgy, hogy ahol az

$f(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ nincs értelmezve, ott az f-nek megfeleltetett F CL-kifejezésre az $F\overline{m_1}\,\overline{m_2}\ldots\overline{m_n}$ kifejezésnek ne legyen normál formája.

Ezzel a definícióval azonban hasonló problémákat kapunk, mint a λ-kalkulusban, a parciális rekurzív függvényeket a kombinátor logikában is a *megoldhatóság* alkalmazásával tudjuk csak pontosan definiálni. Ezzel a témakörrel nem foglalkozunk, de megemlítjük a parciális rekurzív függvények és a CL-definiálhatóság kapcsolatát:

2.8.5. Tétel. (Kleene tétel)

Minden parciális rekurzív függvény CL-definiálható.

2.9. A λ-kalkulus és a kombinátor logika kapcsolata

Úgy tűnik, különösen a λ^* absztrakció bevezetése után, hogy a kombinátor logika és a λ-kalkulus között sok hasonlóság van. A következőkben a kombinátor logika és a λ-kalkulus közötti kapcsolatnak, a kifejezések konvertálhatóságának tulajdonságait vizsgáljuk meg.

2.9.1. Definíció. A $\mathcal{C} \Rightarrow \Lambda$ traszformáció:

Ha $E \in \mathcal{C}$, akkor alakítsa át ezt a CL-kifejezést egy λ-kifejezésre a

$(\cdot)_\Lambda : \mathcal{C} \Rightarrow \Lambda$

leképezés, ahol

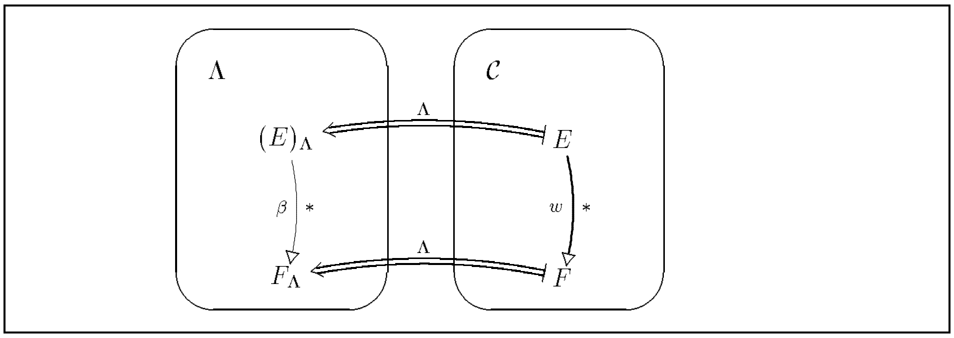
$$\begin{array}{lcl} (x)_\Lambda & \mapsto & x, \\ (\mathsf{K})_\Lambda & \mapsto & \mathsf{K}, \\ (\mathsf{S})_\Lambda & \mapsto & \mathsf{S}, \\ (EF)_\Lambda & \mapsto & (E)_\Lambda(F)_\Lambda. \end{array}$$

A kombinátor logika gyenge redukciója „megfelel" a λ-kalkulus β-redukciójának, ezt mondja ki a következő tétel (2.11. ábra).

2.9.2. Tétel. (A $(\cdot)_\Lambda$ leképezés gyenge redukció tartó)

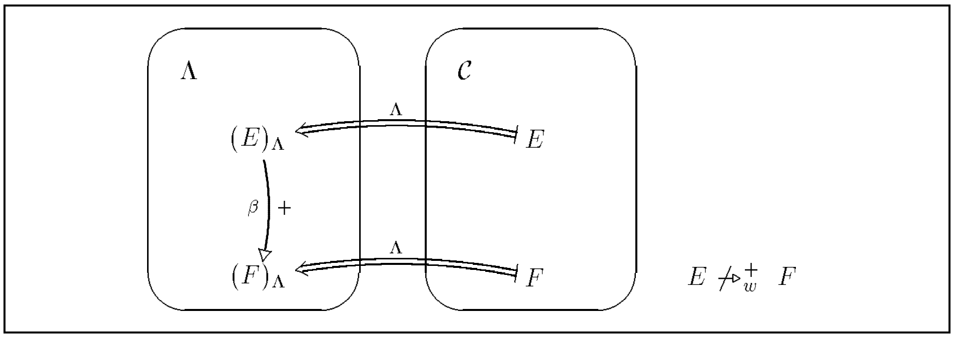
Ha az E és F CL-kifejezésekre $E \mathrel{-\!\!\triangleright}_w^* F$, akkor $(E)_\Lambda \mathrel{-\!\!\triangleright}_\beta^* (F)_\Lambda$.

A tétel az $E \mathrel{-\!\!\triangleright}_w^* F$ szerkezetére vonatkozó indukcióval látható be.



2.11. ábra. A $(\cdot)_\Lambda : \mathcal{C} \Mapsto \Lambda$ leképezés gyenge redukció tartó

A $(\cdot)_\Lambda$ leképezés azonban a β-redukciót nem tartja meg, azaz ha az $(E)_\Lambda$ és $(F)_\Lambda$ λ-kifejezésekre $(E)_\Lambda \mathrel{-\!\!\triangleright}_\beta^+ (F)_\Lambda$, ebből még nem feltétlenül következik, hogy $E \mathrel{-\!\!\triangleright}_w^+ F$ (2.12. ábra).



2.12. ábra. A $(\cdot)_\Lambda : \mathcal{C} \Mapsto \Lambda$ leképezés és a β-redukció

2.9.3. Példa. *(Az $S(KI)K$ kifejezés)*
Ha $E \equiv S(KI)K$, akkor

$(S(KI)K)_\Lambda \mapsto^+ \mathsf{S}(\mathsf{KI})\mathsf{K} \equiv$

$(\lambda xyz\,.\,xz(yz))(\mathsf{K}\,\mathsf{I})\mathsf{K} \;\twoheadrightarrow_\beta^+$
$\lambda z\,.\,\mathsf{K}\,z \equiv$
$\lambda z\,.\,(\lambda xy.x)z \;\twoheadrightarrow_\beta$
$\lambda z\,.\,\lambda y\,.\,z \equiv \mathsf{K}\,.$

Mivel $(K)_\Lambda \mapsto \mathsf{K}$, az $S(KI)K \;\twoheadrightarrow_w^+\; K$ redukciót kellene igazolni, de nyilvánvaló, hogy ez nem lehetséges. □

Most vizsgáljuk meg a fordított irányú leképezést. Jelölje az E λ-kifejezés átalakítását $(E)_\mathcal{C}$, tehát definiáljuk a

$(\cdot)_\mathcal{C} : \Lambda \mapsto \mathcal{C}$

leképezést.

2.9.4. Definíció. A $\Lambda \mapsto \mathcal{C}$ transzformáció:

Ha $E \in \Lambda$, akkor alakítsa át ezt a λ-kifejezést egy CL-kifejezésre a

$(\cdot)_\mathcal{C} : \Lambda \mapsto \mathcal{C}$

leképezés, ahol

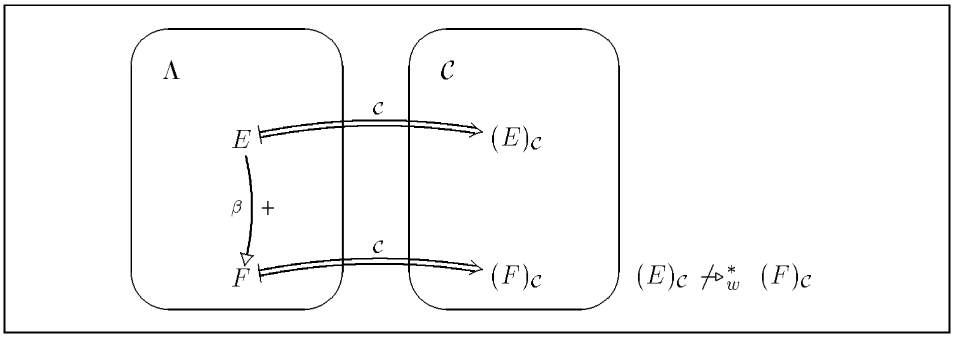
$$\begin{array}{lcl} (x)_\mathcal{C} & \mapsto & x, \\ (EF)_\mathcal{C} & \mapsto & (E)_\mathcal{C}(F)_\mathcal{C}, \\ (\lambda x\,.\,E)_\mathcal{C} & \mapsto & \lambda^* x\,.\,(E)_\mathcal{C}. \end{array}$$

Azt várnánk, hogy ha $E \;\twoheadrightarrow_\beta^+\; F$ a λ-kalkulusban, akkor az $(E)_\mathcal{C} \;\twoheadrightarrow_w^+\; (F)_\mathcal{C}$ levezetésnek is teljesülnie kellene a kombinátor logikában, ez a tulajdonság azonban, mint a következő példa mutatja, *nem* teljesül (2.13. ábra).

2.9.5. Példa. *(A $\lambda x\,.\,(\mathsf{I}y)$ kifejezés)*
A λ-kalkulusban

$\lambda x\,.\,(\mathsf{I}y) \equiv \lambda x\,.\,(\underline{(\lambda x\,.\,x)y}) \;\twoheadrightarrow_\beta\; \lambda x\,.\,y,$

és a két λ-kifejezésre



2.13. ábra. $(\cdot)_{\mathcal{C}} : \Lambda \to \mathcal{C}$ és a redukciók

$$
\begin{aligned}
&(\lambda x\,.\,((\lambda x\,.\,x)y))_{\mathcal{C}} \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,((\lambda x\,.\,x)y)_{\mathcal{C}} \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,((\lambda x\,.\,x)_{\mathcal{C}}(y)_{\mathcal{C}}) \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,((\lambda^* x\,.\,(x)_{\mathcal{C}})(y)_{\mathcal{C}}) \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,((\lambda^* x\,.\,x)(y)_{\mathcal{C}}) \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,((\lambda^* x\,.\,x)y) \equiv\\
&\lambda^* x\,.\,(\mathsf{I}y) \equiv\\
&\mathsf{S}(\lambda^* x\,.\,\mathsf{I})(\lambda^* x\,.\,y) \equiv\\
&\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{I})(\lambda^* x\,.\,y) \equiv\\
&\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{I})(\mathsf{K}y),
\end{aligned}
$$

valamint

$$
\begin{aligned}
&(\lambda x\,.\,y)_{\mathcal{C}} \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,(y)_{\mathcal{C}} \mapsto\\
&\lambda^* x\,.\,y \equiv\\
&\mathsf{K}y,
\end{aligned}
$$

és nyilvánvaló, hogy a kombinátor logikában

$$\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{I})(\mathsf{K}y) \not\rhd_w^+ \mathsf{K}y. \qquad \square$$

A 2.9.3. és 2.9.5. példák adják meg annak a magyarázatát, hogy a kombinátor logikában a redukálások és a normál forma a „gyenge” jelzőt kapja. A *gyenge* jelző azt jelenti, hogy ha egy CL-kifejezés nem redukálható, azaz (gyenge) normál formában van, akkor előfordulhat, hogy a neki megfeleltetett λ-kifejezésnek van redexe, tehát a neki megfeleltetett λ-kifejezésben további redukciókat lehet végehajtani.

2.9.6. Következmény.

A normál forma nem invariáns tulajdonság a λ-kalkulus és a kombinátor logika között.

A kombinátor logikában is definiálhatjuk a *megoldhatóságot*, azt mondjuk, hogy az E CL-kifejezés megoldható, ha léteznek olyan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ CL-kifejezések, amelyekre $EF_1F_2\ldots F_n =_w \mathsf{I}$. A *megoldhatóság* (és a vele ekvivalens *fej normál forma*) viszont már invariáns tulajdonság a λ-kalkulus és a kombinátor logika között, azaz ha $E \in \Lambda$ és $G \in \mathcal{C}$, akkor

- E megoldható akkor és csak akkor, ha $(E)_{\mathcal{C}}$ megoldható,
- G megoldható akkor és csak akkor, ha $(G)_{\Lambda}$ megoldható.

A normál forma nem-invariáns tulajdonságát az okozza, hogy a kombinátor logikában a λ-kalkulus ξ-szabálya nem érvényes, azaz ha $E \twoheadrightarrow_w^+ F$, akkor $\lambda^* x\,.\,E \not\twoheadrightarrow_w^+ \lambda^* x\,.\,F$.

Azonban, ha a $CL{+}ext$ kalkulusban vizsgáljuk a CL-kifejezések egyenlőségét, azt tapasztaljuk, hogy ebben a kalkulusban a $(\cdot)_{\mathcal{C}}$ leképezés a β-redukciókat megtartja.

2.9.7. Példa. *(A 2.9.5. példa a CL+ext kalkulusban)*

Ha a 2.9.5. példa két eredményére az E kifejezést applikáljuk, akkor

$\underline{\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{I})(\mathsf{K}y)E} \twoheadrightarrow_w$
$\underline{\mathsf{K}\mathsf{I}E}(\mathsf{K}yE) \twoheadrightarrow_w$
$\underline{\mathsf{I}(\mathsf{K}yE)} \twoheadrightarrow_w$
$\underline{\mathsf{K}yE} \twoheadrightarrow_w y,$

és

$\underline{\mathsf{K}yE} \rightarrow_w y,$

azaz az *ext* axióma alapján a két kifejezés egyenlő. □

Az *ext* axiómában megfogalmazott *kiterjesztés* egy kicsit gyengíthető, a β-redukció megtartása még a gyengébb feltétel mellett is teljesül.

2.9.8. Definíció. Funkcionális *CL*-kifejezés:

Az E CL-kifejezést funkcionálisnak nevezzük, ha a következő CL-kifejezések egyikével ekvivalens:

K, $\mathsf{K}F$, S, $\mathsf{S}F$, $\mathsf{S}FG$.

Megjegyezzük, hogy egy E CL-kifejezés $\lambda^* . E$ CL-kifejezése mindig funkcionális, ezért a $\lambda x . F$ λ-absztrakciónak megfeleltetett $(\lambda x . F)_{\mathcal{C}} \mapsto \lambda^* x . (F)_{\mathcal{C}}$ CL-kifejezés mindig funkcionális, a λ-kifejezés „függvény jellege" az átalakítás után kapott CL-kifejezésben is megmarad. Ez a tulajdonság csak a λ^* és λ_1^* absztrakciókra áll fenn.

A λ+*wext*-kalkulusban a kiterjesztési axiómát (**??** és **??** definíció) csak olyan Ex, Fx λ-kifejezésekre mondtuk ki, ahol E és F λ-absztrakció. Mivel a λ-absztrakcióknak a funkcionális CL-kifejezések felelnek meg, ha a kiterjeszthetőséget csak a funkcionális CL-kifejezésekre engedjük meg, akkor a kiterjeszthetőséget most is *gyengének* nevezzük.

2.9.9. Definíció. Gyenge kiterjeszthetőség:

Ha E és F funkcionális CL-kifejezések, $Ex =_w Fx$, és $x \notin FV(E)$, $x \notin FV(F)$, akkor $E =_w F$.

Ha a kiterjesztés helyett a gyenge kiterjesztést adjuk meg axiómaként, akkor a CL+*wext* kalkulust kapjuk meg.

2.9.10. Definíció. Az egyszerű típusnélküli gyenge kiterjesztett kombinátor logika:

A gyenge kiterjesztett kombinátor logikát úgy kapjuk meg, hogy a kombinátor logika axiómáit kiegészítjük a

II.vi. E *és* F *funkcionális,*

$$Ex =_w Fx \;\Rightarrow\; E =_w F \qquad \textit{gyenge kiterjeszthetőség} \qquad (wext)$$

axiómával.

A $CL+wext$ kombinátor logika a β-redukciókat megtartja, ezt mondja ki a következő tétel.

2.9.11. Tétel. (A $(\cdot)_{\mathcal{C}}$ leképezés β-redukció tartó $CL+wext$ -ben)

Ha az E *és* F λ*-kifejezésekre* $E \twoheadrightarrow^*_\beta F$*, akkor a* $CL+wext$ *kombinátor logikában* $(E)_{\mathcal{C}} \twoheadrightarrow^*_w (F)_{\mathcal{C}}$.

Megjegyezzük, hogy a $CL+ext$ kombinátor logika esetén a β-redukciók és gyenge redukciók tartása csak a $\lambda\eta$-kalkulusra, vagy az ezzel ekvivalens $\lambda+ext$-kalkulusra teljesül, CL kombinátor logika esetén a $\lambda+wext$-kalkulusra pedig csak akkor, ha a λ_2^*, λ_3^* vagy a λ_4^* zárójeles absztrakciót használjuk.

(2.14. ábra.)

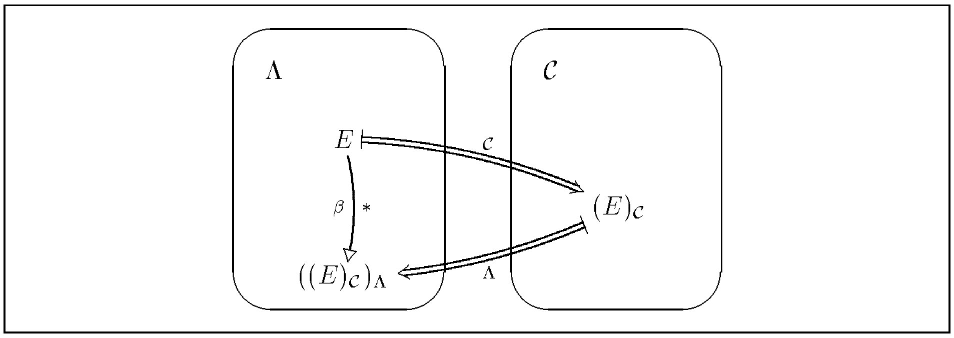
$$\begin{tikzcd}
CL \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\lambda_2^*"] & CL + wext \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\lambda^*"] & CL + ext \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\lambda + wext \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \lambda \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \lambda + ext \equiv \lambda\eta
\end{tikzcd}$$

2.14. ábra. A λ-kalkulus és a kombinátor logika

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy a $(\cdot)_{\mathcal{C}}$ és a $(\cdot)_\Lambda$ leképezések kompozíciója milyen eredményt ad.

2.9.12. Tétel. (A $((\cdot)_{\mathcal{C}})_\Lambda$ leképezés)

Minden E λ*-kifejezésre* $E \twoheadrightarrow^*_\beta ((E)_{\mathcal{C}})_\Lambda$.



2.15. ábra. Az E és az $((E)_{\mathcal{C}})_\Lambda$ kapcsolata

A tétel (2.15. ábra) következménye az, hogy ha $E \in \Lambda^0$, azaz az E nem tartalmaz változókat, akkor $(E)_{\mathcal{C}}$-ben csak K, S kombinátorok vannak, és így $((E)_{\mathcal{C}})_\Lambda$ is csak a K, S kombinátorokból áll. Mivel a fenti tétel alapján

$$E =_\beta ((E)_{\mathcal{C}})_\Lambda,$$

igaz a következő állítás:

2.9.13. Következmény.

Ha $E \in \Lambda^0$, akkor az E leírható egy olyan λ-kifejezéssel, ami csak a K és S kombinátorokat tartalmazza.

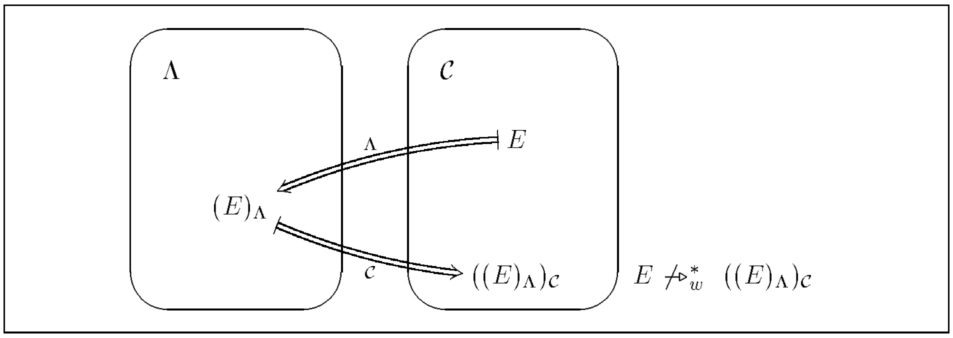
Ez a következmény az alapja annak, hogy a K és S kombinátorokat a λ-kalkulus *bázisának* nevezzük.

A fenti tétel a leképezések fordított sorrendű elvégzésére nem teljesül, azaz ha $E \in \mathcal{C}$, akkor $E \not\triangleright_w^* ((E)_\Lambda)_{\mathcal{C}}$ (2.16. ábra).

Ezt mutatja a következő példa.

2.9.14. Példa. *(A $((\mathsf{K})_\Lambda)_{\mathcal{C}}$ kifejezés)*

$((\mathsf{K})_\Lambda)_{\mathcal{C}} \mapsto$
$(\mathsf{K})_{\mathcal{C}} \equiv$
$(\lambda xy\,.\,x)_{\mathcal{C}} \mapsto$
$\lambda^* x\,.\,(\lambda y\,.\,x)_{\mathcal{C}} \mapsto$



2.16. ábra. Az E és az $((E)_\Lambda)_\mathcal{C}$ kapcsolata

$$\begin{aligned}
&\lambda^*x\,.\,(\lambda^*y\,.\,(x)_\mathcal{C}) \mapsto\\
&\lambda^*x\,.\,(\lambda^*y\,.\,x) \equiv\\
&\lambda^*x\,.\,\mathsf{K}x \equiv\\
&\mathsf{S}(\lambda^*x\,.\,\mathsf{K})(\lambda^*x\,.\,x) \equiv\\
&\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})(\lambda^*x\,.\,x) \equiv\\
&\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I},
\end{aligned}$$

és nyilvánvaló, hogy

$$\mathsf{K} \not\rhd^*_w \; \mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}. \qquad \square$$

Ha a fenti 2.9.14. példa K és $\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}$ kifejezéseire xy-t applikáljuk, akkor

$$\underline{\mathsf{K}xy} \;\rhd_w\; x,$$

és

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\mathsf{I}x}y \;\rhd_w\\
&\underline{\mathsf{K}\mathsf{K}x}(\mathsf{I}x)y \;\rhd_w\\
&\underline{\mathsf{K}(\mathsf{I}x)y} \;\rhd_w\\
&\underline{\mathsf{I}x} \;\rhd_w\; x,
\end{aligned}$$

azaz a fenti két kifejezés a $CL{+}ext$ kalkulusban megegyezik. Az *ext* axióma helyettesíthető a gyengébb *wext* axiómával, és így kimondható a következő tétel.

2.9.15. Tétel. (A $((\cdot)_\Lambda)_\mathcal{C}$ leképezés)

A $CL{+}wext$ kombinátor logikában minden E CL-kifejezésre $E \twoheadrightarrow^*_w ((E)_\Lambda)_\mathcal{C}$.

A. FÜGGELÉK

A kombinátor logika kombinátorai

- A könyvben szereplő kombinátorok és gyenge redukcióik

$\mathsf{K}EF$	$\rightarrowtriangle_w$	E	
$\mathsf{S}EFG$	$\rightarrowtriangle_w$	$EG(FG)$	
$\mathsf{I}E$	$\rightarrowtriangle_w$	E	
$\mathsf{B}EFG$	$\rightarrowtriangle_w$	$E(FG)$	
$\mathsf{C}EFG$	$\rightarrowtriangle_w$	EGF	
$\mathsf{S}'CEFG$	$\rightarrowtriangle_w$	$C(EG)(FG)$	$C \in \mathcal{C}^0$
$\mathsf{B}'CEFG$	$\rightarrowtriangle_w$	$CE(FG)$	$C \in \mathcal{C}^0$
B^*CEFG	$\rightarrowtriangle_w$	$C(E(FG))$	$C \in \mathcal{C}^0$
$\mathsf{C}'CEFG$	$\rightarrowtriangle_w$	$C(EG)F$	$C \in \mathcal{C}^0$
$\mathsf{W}EF$	$\rightarrowtriangle_w$	EFF	
$\mathsf{J}EFG$	$\rightarrowtriangle_w$	EF	(Joy)
$\mathsf{J}EFGH$	$\rightarrowtriangle_w$	$EF(EHG)$	$(Rosser)$
$\mathsf{J}'EFGH$	$\rightarrowtriangle_w$	EFG	
C_*EF	$\rightarrowtriangle_w$	FE	
$\mathsf{Y}E$	$\leftrightarrowtriangle_w$	$E(\mathsf{Y}E)$	
ΘE	$\rightarrowtriangle_w$	$E(\Theta E)$	

- Néhány kombinátor kifejezése

$$
\begin{array}{lcll}
I & \equiv & SKE & \\
I & \equiv & SB(KI) & \\
I & \equiv & CKC & \\
I & \equiv & WK & \\
K & \equiv & BS(BK) & \\
S & \equiv & B(BW)(BBC) & \\
S & \equiv & B(B(BW)C)(BB) & \\
B & \equiv & S(KS)K & \\
B & \equiv & BSK & \\
B & \equiv & C(JIC)(JI) & (Rosser) \\
C & \equiv & S(S(K(S(KS)K))S)(KK) & \\
C & \equiv & S(BBS)(KK) & \\
C & \equiv & JC_*(JC_*)(JC_*) & (Rosser) \\
B' & \equiv & BB & \\
C' & \equiv & B(BC)B & \\
S' & \equiv & B(BS)B & \\
S' & \equiv & B(B(B(B(BW)C)(BB)))B & \\
W & \equiv & CSI & \\
W & \equiv & SS(SK) & \\
W & \equiv & SS(KI) & \\
W & \equiv & S(CI) & \\
W & \equiv & C(S(CC)(CC)) & \\
W & \equiv & C(C(BC(C(BJC_*)C_*))C_*) & (Rosser) \\
C_* & \equiv & CI & \\
C_* & \equiv & JII & (Rosser) \\
Y & \equiv & WS(BWB) & \\
Y & \equiv & SSI(SB(K(SII))) & \\
Y & \equiv & S(CB(SII))(CB(SII)) &
\end{array}
$$

- Néhány optimalizáló újraírási szabály

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{S}(\mathsf{K}E)\mathsf{I} & \mapsto & E \\
\mathsf{S}(\mathsf{K}E)(\mathsf{K}F) & \mapsto & \mathsf{K}(EF) \\
\mathsf{S}(\mathsf{K}E)F & \mapsto & \mathsf{B}EF \\
\mathsf{S}E(\mathsf{K}F) & \mapsto & \mathsf{C}EF \\
\mathsf{S}(\mathsf{K}E) & \mapsto & \mathsf{B}E \\
\mathsf{S}(\mathsf{B}C\,E)F & \mapsto & \mathsf{S}'C\,EF \\
\mathsf{S}(\mathsf{K}C\,E)F & \mapsto & \mathsf{B}'C\,EF \\
\mathsf{S}(\mathsf{K}C)(\mathsf{B}EF) & \mapsto & \mathsf{B}^{*}CEF \\
\mathsf{S}(\mathsf{B}C\,E)(\mathsf{K}F) & \mapsto & \mathsf{C}'C\,EF \\
\mathsf{S}E\mathsf{I} & \mapsto & \mathsf{W}E \\
\mathsf{B}(C\,E)F & \mapsto & \mathsf{B}'C\,EF \\
\mathsf{B}C(\mathsf{B}EF) & \mapsto & \mathsf{B}^{*}CEF \\
\mathsf{B}E\mathsf{I} & \mapsto & E \\
\mathsf{B}\mathsf{I}E & \mapsto & E \\
\mathsf{B}(\mathsf{B}EF) & \mapsto & \mathsf{B}'EF \\
\mathsf{C}(\mathsf{B}C\,E)F & \mapsto & \mathsf{C}'C\,EF \\
\mathsf{C}(\mathsf{B}EF) & \mapsto & \mathsf{C}'EF \\
\mathsf{S}'C\,(\mathsf{K}E)F & \mapsto & \mathsf{B}'C\,EF \\
\mathsf{S}'C\,E(\mathsf{K}F) & \mapsto & \mathsf{C}'C\,EF \\
\mathsf{C}'EIF & \mapsto & \mathsf{C}EF \\
\mathsf{J}\mathsf{I}E & \mapsto & E \qquad (Joy) \\
\mathsf{Y}(\mathsf{K}E) & \mapsto & E
\end{array}
$$

B. FÜGGELÉK

Definíciók, tételek jegyzéke

Irodalom

[Bar84] Hendrik Pieter Barendregt, *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, North-Holland, 1984.

[Hin86] J. Roger Hindley, Jonathan P. Seldin, *Introduction to Combinators and λ-Calculus*, Cambridge University Press, 1986.

[Pey87] Simon L. Peyton Jones, *The Implementation of Functional Programming Languages*, Prentice Hall, 1987.

[Dil88] Antoni Diller, *Compiling Functional Languages*, John Wiley & Sons Ltd., 1988.

[Bir88] Richard Bird, Philip Wadler, *Introduction to Functional Programming*, Prentice Hall, 1988.

[Hud89] Paul Hudak, *Conception, Evolution, and Application of Functional Programming Languages*, ACM Computing Surveys, Vol.21, No.3, (September 1989)

[Csö92] Csörnyei Zoltán, *Bevezetés a fordítóprogramok elméletébe, 1. rész [Analízis]*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[Csö93] Csörnyei Zoltán, *Bevezetés a fordítóprogramok elméletébe, 2. rész [Szintézis]*, ELTE Kiadó, Budapest, 1993.

[Fis93] Alice E. Fischer, Frances S. Grodzinsky, *The Anatomy of Programming Languages*, Prentice-Hall International, Inc., 1993.

[Pla93] Rinus Plasmeijer, Marko van Eekelen, *Functional Programming and Parallel Graph Rewriting*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[Wil95] Reinhard Wilhelm, Dieter Maurer, *Compiler Design*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[Gor96] Mike Gordon, *Introduction to Functional Programming*, Lecture Notes, University of Cambridge, 1996.

[Pau96] Lawrence C. Paulson, *Foundation of Functional Programming*, Lecture Notes, University of Cambridge, 1996.

[Har97] John Harrison, *Introduction to Functional Programming*, Lecture Notes, University of Cambridge, 1997.

[Ong98] C.-H. Luke Ong, *Lambda Calculus*, Lecture Notes, Oxford University, 1998.

[Ker00] Andrew D. Ker, *Lambda Calculus*, Lecture Notes, Oxford University, 2000.

Névmutató

Tárgymutató