Dr. Hunyadvári László

Automaták és formális nyelvek II.

Jegyzet programtervező matematikus és informatika tanári
szakos hallgatók számára

Technikai kivitelezés:
Tichler Krisztián

Első kiadás, utolsó javítás dátuma: 2009. január 9.

Készült Donald E. Knuth TEX szövegszedő rendszerével.

Budapest, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar, 2009.

Tartalomjegyzék

1 K-korlátolt nyelvtanok, homomorfizmus lemma **2**
1.1. Homomorfizmus lemma 2
1.2. K-korlátolt nyelvtanok 2
1.3. Alkalmazások 7
1.3.1. Chomsky nyelvosztályok metszetre való zártsága 7

2 Programozott nyelvtanok **9**
2.1. Előfordulásellenőrzés nélküli programozott nyelvtanok 9
2.2. Előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtanok 13

3 Mátrixnyelvtanok **23**

4 Kontrollnyelvtanok **27**

5 Indexelt nyelvtanok **30**

6 Attribútumnyelvtanok **36**

7 Kétszintű nyelvtanok **40**

8 Párhuzamos nyelvtanok **43**
8.1. Lindenmayer-rendszerek 44
8.2. CD nyelvtani rendszerek 48
8.3. PC rendszerek 52

1. K-korlátolt nyelvtanok, homomorfizmus lemma

1.1. Homomorfizmus lemma

1.1. tétel. (Homomorfizmus lemma) *Legyenek* $G_1 = \langle T_1, N_1, \mathcal{P}_1, S_1 \rangle$ *és* $G_2 = \langle T_2, N_2, \mathcal{P}_2, S_2 \rangle$ *nyelvtanok. Legyen továbbá* $h : (T_1 \cup N_1)^* \to (T_2 \cup N_2)^*$ *homomorfizmus, melyre*

1. *minden* $p \to q \in \mathcal{P}_1$ *esetén* $h(p) \xrightarrow[G_2]{*} h(q)$,
2. $h(T_1) \subseteq T_2^*$,
3. $h(S_1) = S_2$.

Ekkor $h(L(G_1)) \subseteq L(G_2)$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy ha $\alpha \xrightarrow[G_1]{} \beta$, akkor $h(\alpha) \xrightarrow[G_2]{*} h(\beta)$. Valóban, ha $\alpha \xrightarrow[G_1]{} \beta$, akkor létezik $\alpha_1, \alpha_2 \in (T_1 \cup N_1)^*$ és $p \to q \in \mathcal{P}_1$, hogy $\alpha = \alpha_1 p \alpha_2$ és $\beta = \alpha_1 q \alpha_2$. Az 1. feltétel és a homomorfizmus definíciója szerint

$$h(\alpha) = h(\alpha_1 p \alpha_2) = h(\alpha_1)h(p)h(\alpha_2) \xrightarrow[G_2]{*} h(\alpha_1)h(q)h(\alpha_2) = h(\alpha_1 q \alpha_2) = h(\beta).$$

A fenti állításból a levezetés hosszára vonatkozó egyszerű teljes indukcióval adódik, hogy ha $\alpha \xrightarrow[G_1]{*} \beta$, akkor $h(\alpha) \xrightarrow[G_2]{*} h(\beta)$.

Tegyük fel, hogy $u \in L(G_1)$, azaz $S_1 \xrightarrow[G_1]{*} u$. Az előbbiek, valamint a 2. és 3. feltételek alapján

$$S_2 = h(S_1) \xrightarrow[G_2]{*} h(u) \in T_2^*,$$

tehát $h(u) \in L(G_2)$. Mivel u tetszőleges volt, ezért $h(L(G_1)) \subseteq L(G_2)$. □

1.2. K-korlátolt nyelvtanok

1.2. definíció. *Egy* $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$ *nyelvtanban egy*

$$D : \alpha_0 \underset{G}{\rightarrow} \alpha_1 \underset{G}{\rightarrow} \cdots \underset{G}{\rightarrow} \alpha_n$$

levezetés munkaterülete*, a levezetés leghosszabb mondatformájának hossza, melyet* ws(D)*-vel jelölülünk, azaz*

$$\mathrm{ws}(D) := \max_{i=0,\dots,n} \ell(\alpha_i).$$

1.3. definíció. *Legyen $K \geq 1$ egész. A G nyelvtan K*-korlátolt*, ha minden $u \in L(G)$-hez van olyan $D : S \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} u$ levezetés, melyre $ws(D) \leq K \cdot \widetilde{\ell}(u)$, ahol*

$$\widetilde{\ell}(u) := \begin{cases} 1 & \text{ha } u = \varepsilon \\ \ell(u) & \text{ha } u \neq \varepsilon \end{cases}.$$

Jelölje a K-korlátolt nyelvtanok osztályát $\mathcal{G}_{K\mathrm{lb}}$ $(K \geq 1)$.

1.4. definíció. *Egy L nyelv K*-korlátolt*, ha létezik olyan $G \in \mathcal{G}_{Klb}$ nyelvtan, melyre $L(G) = L$.*

Jelölje a K-korlátolt nyelvek osztályát $\mathcal{L}_{K\mathrm{lb}}$ $(K \geq 1)$.

Példák $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{L}_{4\mathrm{lb}}$.

Bizonyítás. A $G = \langle \{a\}, \{S, L, R, D, E\}, \{S \rightarrow LEaR, Ea \rightarrow aaE, aD \rightarrow Daa, ER \rightarrow DR, LD \rightarrow LE, LE \rightarrow \varepsilon, DR \rightarrow \varepsilon, L \rightarrow \varepsilon, R \rightarrow \varepsilon\}, S\rangle$ nyelvtanra $L(G) = L$. a^{2^n} egy D levezetésére $\mathrm{ws}(D) = 2^n + 3 = \ell(u) + 3 \leq 4 \cdot \ell(u)$ áll. □

1.5. tétel. *Ha $L \in \mathcal{L}_{Klb}$, akkor $L \cup \{\varepsilon\}, L \setminus \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_{Klb}$.*

Bizonyítás. Legyen $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle$ az L nyelvet generáló K-korlátolt nyelvtan $(S' \notin N)$. Ekkor a $G' = \langle T, N \cup \{S'\}, \mathcal{P} \cup \{S' \rightarrow S \mid \varepsilon\}, S'\rangle$ nyelvtan szintén K-korlátolt és $L(G') = L \cup \{\varepsilon\}$.

Legyen $\mathcal{P}_\varepsilon = \{p \rightarrow q \in \mathcal{P} \mid q = \varepsilon\}$. Továbbá minden $P = p \rightarrow \varepsilon \in \mathcal{P}_\varepsilon$ esetén legyen $\mathcal{P}_P = \{Zp \rightarrow Z, pZ \rightarrow Z \mid Z \in T \cup N\}$. Tekintsük a $G'' = \langle T, N, \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\varepsilon \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}_\varepsilon} \mathcal{P}_P, S\rangle$ nyelvtant. $L \setminus \{\varepsilon\}$ minden szavának egy G-beli levezetéséhez megfeleltethető egy olyan levezetés G''-ben, ahol a levezetés során kapott mondatformák ugyanazok, és ez G és G'' szerepét felcserélve is igaz. Tehát $L(G'') = L \setminus \{\varepsilon\}$, továbbá G'' is K-korlátolt, hiszen a G-beli levezetésnek megfelelő G''-beli levezetés ugyanazt a munkaterületet használja. □

1.6. következmény. *Ha $\varepsilon \notin L$, $L \in \mathcal{L}_{Klb}$, akkor létezik G ε-szabálymentes nyelvtan, melyre $G \in \mathcal{G}_{Klb}$ és $L(G) = L$.*

Mivel $\mathcal{G}_{K\mathrm{lb}} \subseteq \mathcal{G}_{(K+1)\mathrm{lb}}$, ezért $\mathcal{L}_{K\mathrm{lb}} \subseteq \mathcal{L}_{(K+1)\mathrm{lb}}$ $(K \geq 1)$.

1.7. tétel. *Minden $K \geq 1$ egész számra $\mathcal{L}_{1lb} = \mathcal{L}_{Klb}$.*

Bizonyítás. A tétel előtti észrevétel alapján elegendő belátni, hogy $\mathcal{L}_{K\mathrm{lb}} \subseteq \mathcal{L}_{1\mathrm{lb}}$. Legyen $L \in \mathcal{L}_{K\mathrm{lb}}$. Feltehető, hogy $\varepsilon \notin L$, hiszen az 1.5 tétel szerint, ha ε-mentes nyelvekre igaz az állítás, akkor $L \in \mathcal{L}_{K\mathrm{lb}} \Rightarrow L \setminus \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_{K\mathrm{lb}} \Rightarrow L \setminus \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_{1\mathrm{lb}} \Rightarrow L \in \mathcal{L}_{1\mathrm{lb}}$.

Legyen tehát $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle$ egy K-korlátolt nyelvtan, mely L-et generálja. 1.6 következmény szerint az is feltehető, hogy G-nek nincsenek ε-szabályai.

Legyen $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', \overline{S}\rangle$, ahol $N' = X \cup Y$, ahol $X = \{\widetilde{\alpha}\}_{\alpha \in (T\cup N)^K}$ és $Y = \{\overline{\beta}\}_{\beta \in \bigcup_{i=1}^K (T\cup N)^i}$. X elemeit hullámos, Y elemeit vonalas blokkoknak, míg X^*YX^* elemeit megengedett blokkosításoknak nevezzük. Világos, hogy tetszőleges $\alpha \in (T\cup N)^*$ mondatformához van olyan $\widetilde{\psi}_1 \cdots \widetilde{\psi}_r \overline{\varrho} \widetilde{\psi}_{r+1} \cdots \widetilde{\psi}_s$ megengedett blokkosítás, melyre $\alpha = \psi_1 \cdots \psi_r \varrho \psi_{r+1} \cdots \psi_s$ (általában több is van).

Továbbá legyen $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ a következő szabályhalmaz.
$\mathcal{P}_1$ szabályai átblokkosító szabályok.

$$\overline{\alpha}\widetilde{\beta} \to \widetilde{\alpha}'\overline{\beta}' \in \mathcal{P}_1 \;\Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha'\beta',$$

$$\widetilde{\beta}\overline{\alpha} \to \overline{\beta'}\widetilde{\alpha}' \in \mathcal{P}_1 \;\Leftrightarrow\; \beta\alpha = \beta'\alpha'$$

Ezek a szabályok az ugyanahhoz az $\alpha \in (T\cup N)^*$ mondatformához tartozó megengedett blokkosítások egymásba való átalakítására, átblokkosítására szolgálnak.
$\mathcal{P}_2$ szabályai a $\mathcal{P}$-beli szabályoknak megfelelő blokkosított szabályok.

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_1 \cdots \widetilde{\tau}_\ell \overline{\gamma} \widetilde{\tau}_{\ell+1} \cdots \widetilde{\tau}_m \to \widetilde{\chi}_1 \cdots \widetilde{\chi}_j \overline{\delta} \widetilde{\chi}_{j+1} \cdots \widetilde{\chi}_r \in \mathcal{P}_2 \iff & \text{létezik } p \to q \in P \text{, hogy} \\ & \tau_1 \cdots \tau_\ell \gamma \tau_{\ell+1} \cdots \tau_m \xrightarrow[G]{p\to q} \chi_1 \cdots \chi_j \delta \chi_{j+1} \cdots \chi_r, \\ & \text{továbbá } p \text{ az összes } \tau_i\text{-be belemetsz} \\ & (\text{azaz } \tau_1 \cdots \tau_\ell \gamma \tau_{\ell+1} \cdots \tau_m = \sigma_1 p \sigma_2 \text{ és } \ell(\sigma_1) < K,\ \ell(\sigma_2) < K.)\end{aligned}$$

Végül $\mathcal{P}_3$ szabályai a deblokkosító szabályok.

$$\overline{\gamma} \to \gamma \in \mathcal{P}_3 \;\Leftrightarrow\; \gamma \in T^*,$$

$$t\widetilde{\gamma} \to t\gamma \in \mathcal{P}_3 \;\Leftrightarrow\; t \in T,\, \gamma \in T^*,$$

$$\widetilde{\gamma}t \to \gamma t \in \mathcal{P}_3 \;\Leftrightarrow\; t \in T,\, \gamma \in T^*.$$

Először belátjuk, hogy $L(G') \subseteq L(G)$. A $h : (T\cup N')^* \to (T\cup N)^*$ homomorfizmust $T \cup N'$ elemein a következőképpen definiáljuk.

$$h(t) = t\ (t \in T),\quad h(\widetilde{\alpha}) = \alpha\ (\alpha \in (T\cup N)^K),\quad h(\overline{\beta}) = \beta\ (\beta \in \textstyle\sum_{i=1}^K (T\cup N)^i).$$

A G', G nyelvtanokra és h homomorfizmusra teljesülnek a Homomorfizmus lemma (1.1 tétel) feltételei. Tehát

$$L(G') = h(L(G')) \subseteq L(G).$$

Most lássuk be, hogy $L(G) \subseteq L(G')$. Legyen

$$D : S = \alpha_0 \underset{G}{\to} \alpha_1 \underset{G}{\to} \cdots \underset{G}{\to} \alpha_n = u$$

egy olyan levezetése az u szónak G-ben, melyre $\mathrm{ws}(D) \le K \cdot \ell(u)$. Készítünk egy

$$D' : \overline{S} = \alpha'_0 \xrightarrow[G']{*} \alpha'_1 \xrightarrow[G']{*} \cdots \xrightarrow[G']{*} \alpha'_n \xrightarrow[G']{*} u$$

levezetést G'-ben, melyre minden $0 \le i \le n$ esetén, ha $\alpha'_i = \widetilde{\psi}_1 \cdots \widetilde{\psi}_r \overline{\varrho} \widetilde{\psi}_{r+1} \cdots \widetilde{\psi}_s$ akkor $\alpha_i = \psi_1 \cdots \psi_r \varrho \psi_{r+1} \cdots \psi_s$.

Legyen $\alpha'_0 = \overline{S}$. Tegyük fel, hogy $\alpha'_i = \widetilde{\psi}_1 \cdots \widetilde{\psi}_r \overline{\varrho} \widetilde{\psi}_{r+1} \cdots \widetilde{\psi}_s$ D'-beli mondatforma és $\alpha_i = \psi_1 \cdots \psi_r \varrho \psi_{r+1} \cdots \psi_s$. Belátjuk, hogy G'-ben levezethető egy olyan α'_{i+1} mondatforma, mely deblokkosítva éppen α_{i+1}-t adja.

Legyen $\alpha_i = \gamma_1 p \gamma_2$, $\alpha_{i+1} = \gamma_1 q \gamma_2$ és $p \to q \in \mathcal{P}$ és készítsük el α_i következő megengedett blokkosítását:

$$\widehat{\alpha}_i = \widetilde{\beta}_1 \cdots \widetilde{\beta}_\ell \widetilde{\tau}_1 \cdots \widetilde{\tau}_s \overline{\varrho} \widetilde{\tau}_{s+1} \cdots \widetilde{\tau}_{s'} \widetilde{\beta}_{\ell+1} \cdots \widetilde{\beta}_{\ell'},$$

ahol $p \subseteq \tau_1 \cdots \tau_s \varrho \tau_{s+1} \cdots \tau_{s'}$ és minden $j \in \{1, \ldots, s'\}$-re τ_j tartalmaz p-beli betűt. (α_i két végéről levágunk K hosszúságú szavakat addig, amíg a következő vágással már belemetszenénk p-be. A levágott K hosszú szavak lesznek a β_i-k, míg a közepét felbontjuk $\tau_1 \cdots \tau_s \varrho \tau_{s+1} \cdots \tau_{s'}$ alakban, ahol minden $j \in \{1, \ldots, s'\}$-re $\ell(\tau_j) = K$ és $\ell(\varrho) \le K$.) $\widehat{\alpha}_i$ az előzőek szerint $\mathcal{P}_1$ szabályaival levezethető α'_i-ből.

Világos, hogy $\widetilde{\tau}_1 \cdots \widetilde{\tau}_s \overline{\varrho} \widetilde{\tau}_{s+1} \cdots \widetilde{\tau}_{s'}$-re teljesülnek a $\mathcal{P}_2$-beli szabályok baloldalára előírt feltételek. Ezért a megfelelő $\mathcal{P}_2$-beli szabály alkalmazásával α_{i+1}-hez tartozó blokkosított mondatformát kapunk, legyen ez az α'_{i+1}.

Tehát ha $S \xrightarrow[G]{*} u$, akkor $\overline{S} \xrightarrow[G']{*} v$, valamely $v \in (N')^*$-ra, mely az u-nak egy blokkosított változata. Innen $\mathcal{P}_3$ szabályaival levezethető G'-ben u, tehát $L(G) \subseteq L(G')$.

Végül az 1-korlátoltság bizonyításához elegendő belátni, hogy a fenti D' levezetésre $\mathrm{ws}(D') \le \ell(u)$, azaz D' minden α' mondatformájára $\ell(\alpha') \le \ell(u)$. Ezt a mondatforma levezetésbeli indexére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $\alpha' = \alpha'_0 = \overline{S}$, akkor $\ell(\alpha') = 1 \le \ell(u)$. A levezetés két részből áll. Az első részben csak $(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$-beli szabályokat alkalmazunk, utána csak $\mathcal{P}_3$-belieket.

Tegyük fel, hogy $D' : \cdots \xrightarrow[G']{} \beta' \xrightarrow[G']{} \alpha' \xrightarrow[G']{} \cdots$ és β'-re igaz az állítás. Ha α'-t β'-ből $\mathcal{P}_1$-beli szabály alkalmazásával kaptuk, akkor az indukciós feltevés szerint $\ell(\alpha') = \ell(\beta') \le \ell(u)$. Ha $\mathcal{P}_2$-beli szabály alkalmazásával kaptuk α'-t, akkor van olyan α mondatforma D-ben, melyre ha $\alpha' = \widetilde{\chi}_1 \cdots \widetilde{\chi}_j \overline{\delta} \widetilde{\chi}_{j+1} \cdots \widetilde{\chi}_r$ akkor $\alpha = \chi_1 \cdots \chi_j \delta \chi_{j+1} \cdots \chi_r$.

Mivel α'-ben minden blokk hossza K legfeljebb egy kívétellel, ezért G K-korlátoltsága miatt

$$\ell(\alpha') = \lceil \ell(\alpha)/K \rceil \le \lceil (K \cdot \ell(u))/K \rceil = \ell(u).$$

$\mathcal{P}_3$-beli szabályokat csak a levezetés második részében, azaz akkor alkalmazunk, ha már u egy blokkosított formáját levezettük. Viszont ekkor a levezetésnek ez a már csak deblokkosító szabályokat alkalmazó része legfeljebb $\ell(u)$ munkaterületet használ. □

1.8. tétel. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{1lb}$.

Bizonyítás. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_{1\mathrm{lb}}$ nyilvánvaló, hiszen ekkor egy $\mathcal{L}_1$-beli nyelvet generáló nyelvtanban egy nemüres szó levezetése során nem csökkenhet az aktuális mondatforma hossza, így ilyenkor elegendő akkora munkaterület, mint az utolsó mondatforma, azaz a levezetett terminális szó, hossza. Az ε szó egyetlen $S \to \varepsilon$ levezetésének a munkaterülete pedig 1, ami éppen egyenlő $\widetilde{\ell}(\varepsilon)$-val. Elegendő tehát belátni, hogy tetszőleges $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle \in \mathcal{G}_{1\mathrm{lb}}$ nyelvtanhoz létezik $G' \in \mathcal{G}_1$, hogy $L(G') = L(G)$.

A 1.7 tétel bizonyításában látottakhoz hasonló érvelés alapján feltehető, hogy $\mathcal{P}$-ben nincsenek ε-szabályok, továbbá $B \notin N$.

Legyen $G' = \langle T, N \cup \{B\}, \mathcal{P}', S\rangle$, ahol $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$.

$\mathcal{P}_1$ szabályai a hosszat csökkentő $\mathcal{P}$-beli szabályok jobboldalát annyi B-vel egészítik ki, hogy a két oldal egyező hosszúságú legyen.

$$p \to qB^{\ell(p)-\ell(q)} \in \mathcal{P}_1 \;\Leftrightarrow\; p \to q \text{ és } \ell(q) < \ell(p).$$

$\mathcal{P}_2$ szabályai hosszat nem csökkentő $\mathcal{P}$-beli szabályok esetén csökkenthetik a B-k számát.

$$pB^j \to q \in \mathcal{P}_2 \;\Leftrightarrow\; p \to q \text{ és } \ell(p) + j \le \ell(q).$$

A $\mathcal{P}_3$-beli szabályokkal a B-k a megfelelő pozícióba cserélhetők.

$$ZB \to BZ \in \mathcal{P}_3 \quad (Z \in T \cup N),$$

$$BZ \to ZB \in \mathcal{P}_3 \quad (Z \in T \cup N).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $G' \in \mathcal{G}_1$, azt kell csak belátni, hogy $L(G') = L(G)$.

Tekintsük azt a $h : (T \cup N \cup \{B\})^* \to (T \cup N)^*$ homomorfizmust, melyre $h(B) = \varepsilon$ és $h(Z) = Z$ $(Z \in T \cup N)$. Minden G'-beli szabály h-képe nyilván G-beli vagy a baloldalának és a jobboldalának ugyanaz a képe valamint a Homomorfizmus lemma (1.1 tétel) további feltételei is teljesülnek, tehát $L(G') = h(L(G')) \subseteq L(G)$.

Be kell még látni, hogy ha $u \in L(G)$, akkor $u \in L(G')$. Ha $u \in L(G)$, akkor létezik olyan $D:\; S = \alpha_0 \underset{G}{\to} \alpha_1 \underset{G}{\to} \cdots \underset{G}{\to} \alpha_n = u$ levezetés, melyre $\mathrm{ws}(D) \le \ell(u)$, azaz minden $j = 0, \ldots n$-re $\ell(\alpha_j) \le \ell(u)$.

Elkészítjük u-nak egy olyan D' levezetését G'-ben, melyre

$$D':\; S = \alpha_0 B^{j_0} \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \alpha_1 B^{j_1} \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \cdots \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \alpha_n B^{j_n} \qquad (j_0 = 0,\, j_n = 0).$$

$S \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \alpha_0 B^{j_0}$. Tegyük fel, hogy valamely $0 \le r \le n-1$ -re $S \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \alpha_r B^{j_r}$.

Készítsük tehát el G'-ben az $\alpha_r B^{j_r} \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \alpha_{r+1} B^{j_{r+1}}$ levezetést

Ha $\alpha_r \underset{G}{\to} \alpha_{r+1}$ hosszúságot csökkentő szabállyal történt, akkor alkalmazzuk a szabálynak megfelelő $\mathcal{P}_1$-beli szabályt, majd a B-ket a $\mathcal{P}_3$-beli szabályokkal vigyük a mondatforma végére. Azaz, ha $\alpha_r = \gamma_1 p \gamma_2$ és $\alpha_{r+1} = \gamma_1 q \gamma_2$, továbbá $\ell(p) > \ell(q)$, akkor

$$\alpha_r B^{j_r} = \gamma_1 p \gamma_2 B^{j_r} \underset{G'}{\to} \gamma_1 q B^{\ell(p)-\ell(q)} \gamma_2 B^{j_r} \overset{*}{\underset{G'}{\to}} \gamma_1 q \gamma_2 B^{j_r + \ell(p)-\ell(q)} = \alpha_{r+1} B^{\ell(p)-\ell(q)}.$$

Ha $\alpha_r \underset{G}{\to} \alpha_{r+1}$ hosszúságot nem csökkentő $p \to q$ szabállyal történt, akkor vigyünk m_r darab B-t közvetlenül p utánra, majd alkalmazzunk a megfelelő m_r darab B-t elnyelő $\mathcal{P}_2$-beli szabályt, ahol $m_r = \max\{j_r, \ell(q) - \ell(p)\}$. Azaz, ha $\alpha_r = \gamma_1 p \gamma_2$ és $\alpha_{r+1} = \gamma_1 q \gamma_2$, továbbá $\ell(p) \leq \ell(q)$, akkor

$$\alpha_r B^{j_r} = \gamma_1 p \gamma_2 B^{j_r} \xrightarrow[G']{*} \gamma_1 p B^{m_r} \gamma_2 B^{j_r - m_r} \xrightarrow[G']{} \gamma_1 q \gamma_2 B^{j_r - m_r} = \alpha_{r+1} B^{j_r - m_r}.$$

Állítás: minden $0 \leq r \leq n$-re $\ell(\alpha_r) + j_r \leq \ell(u)$ teljesül.

Az állítás teljes indukcióval látható be. Mivel feltettük, hogy $u \neq \varepsilon$, ezért $r = 0$-ra igaz az állítás. $(1 + 0 \leq \ell(u))$.

Tegyük fel, hogy $\ell(\alpha_r) + j_r \leq \ell(u)$. Belátjuk, hogy $\ell(\alpha_{r+1}) + j_{r+1} \leq \ell(u)$.

Ha a $\alpha_r \xrightarrow[G']{*} \alpha_{r+1}$ levezetés során a $p \to q$ hosszat csökkentő szabálynak megfelelő $\mathcal{P}_1$-beli szabályt alkalmaztunk, akkor

$$\ell(\alpha_{r+1}) + j_{r+1} = (\ell(\alpha_r) - \ell(p) + \ell(q)) + (j_r + \ell(p) - \ell(q)) = \ell(\alpha_r) + j_r \leq \ell(u).$$

Ha az $\alpha_r \xrightarrow[G']{*} \alpha_{r+1}$ levezetés során a $p \to q$ hosszat nem csökkentő szabálynak megfelelő $\mathcal{P}_2$-beli szabályt alkalmaztunk, akkor $m_r = \ell(q) - \ell(p)$ esetén

$$\ell(\alpha_{r+1}) + j_{r+1} = (\ell(\alpha_r) - \ell(p) + \ell(q)) + (j_r - m_r) = \ell(\alpha_r) + j_r \leq \ell(u),$$

ha viszont $m_r = j_r$, azaz $j_{r+1} = j_r - m_r = 0$, akkor a D G-beli levezetés 1-korlátoltsága miatt ekkor is

$$\ell(\alpha_{r+1}) + j_{r+1} = \ell(\alpha_{r+1}) \leq \ell(u),$$

amivel az állítást beláttuk.

Alkalmazzuk az állítást α_n-re: $\ell(\alpha_n) + j_n \leq \ell(u)$. Mivel $\alpha_n = u$, ezért kapjuk, hogy $j_n = 0$, tehát a D' levezetés G'-ben éppen u-t vezeti le. □

1.3. Alkalmazások

1.3.1. Chomsky nyelvosztályok metszetre való zártsága

Korábban láttuk, hogy $\mathcal{L}_3$ zárt a metszetre (***Formális nyelvek I. jegyzet 3.36 tétel***), viszont $\mathcal{L}_2$ nem (***Formális nyelvek I. jegyzet 5.12 tétel***).

1.9. tétel. *$\mathcal{L}_0$ és $\mathcal{L}_1$ zárt a $\cap$ műveletre.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy tetszőleges $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_i$ $(i = 0, 1)$ nyelvtanokhoz létezik $G_\cap \in \mathcal{G}_i$, melyre $L(G_\cap) = L(G_1) \cap L(G_2)$.

Legyen $G_1 = \langle T_1, N_1, \mathcal{P}_1, S_1 \rangle$ és $G_2 = \langle T_2, N_2, \mathcal{P}_2, S_2 \rangle$ A nyelvtani jelek esetleges átnevezésével feltehető, hogy $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, továbbá, hogy $T_1 = T_2 =: T$ (ugyanis tekinthetjük őket $T_1 \cup T_2$ feletti nyelvtanoknak). Tekintsük a $G_\cap = \langle T, N_\cap, \mathcal{P}_\cap, S \rangle$ nyelvtant, ahol $N_\cap = N_1 \cup N_2 \cup \{S, L\} \cup \{X_t \mid t \in T\} \cup \{Y_t \mid t \in T\}$, $\mathcal{P}_\cap = \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{P}}_2 \cup \mathcal{P}'$ és $\mathcal{P}' = \{S \to L S_1 S_2, L \to$

$\varepsilon\} \cup \{X_{t_1}Y_{t_2} \to Y_{t_2}X_{t_1} \mid t_1, t_2 \in T\} \cup \{LX_tY_t \to tL \mid t \in T\}$. Továbbá $\overline{\mathcal{P}}_i$-t úgy kapjuk $\mathcal{P}_i$-ből, hogy minden szabályban a terminálisokat a nekik megfelelő egyedi álterminális nyelvtani jelre cseréljük, mégpedig $\mathcal{P}_1$-ben t-t X_t-re, $\mathcal{P}_2$-ben t-t Y_t-re.

$L(G_1) \cap L(G_2) \subseteq L(G_\cap)$. Ugyanis legyen $u = t_1 \cdots t_n \in L(G_1) \cap L(G_2)$, tehát $S_1 \xrightarrow[G_1]{*} u$ és $S_1 \xrightarrow[G_2]{*} u$. Ekkor

$$S \xrightarrow[G_\cap]{} LS_1S_2 \xrightarrow[G_\cap]{*} LX_{t_1} \cdots X_{t_n}S_2 \xrightarrow[G_\cap]{*} LX_{t_1} \cdots X_{t_n}Y_{t_1} \cdots Y_{t_n} \xrightarrow[G_\cap]{*}$$
$$\xrightarrow[G_\cap]{*} LX_{t_1}Y_{t_1} \cdots X_{t_n}Y_{t_n} \xrightarrow[G_\cap]{*} t_1 \cdots t_nL \xrightarrow[G_\cap]{} t_1 \cdots t_n = u$$

$L(G_\cap) \subseteq L(G_1) \cap L(G_2)$ bizonyításához készítsük el a $h_i : (T \cup N_\cap)^* \to (T \cup N_i)^*$ homomorfizmusokat ($i = 1, 2$), melyeket $T \cup N_\cap$ elemein elegendő megadni.

Legyen $h_i(t) = t$ ($t \in T$), $h_i(S) = S_i$, $h_i(A) = A$ ($A \in N_i$), $h_i(Z) = \varepsilon$ ($Z \notin T \cup N_i \cup \{S\}$).

Mivel a h_i homomorfizmus esetén a nem $\overline{\mathcal{P}}_i$-beli szabályok baloldalának és a jobboldalának ugyanaz a képe és $\overline{\mathcal{P}}_i$-beli szabályok képe G_i-beli szabály, ezért a h_i ($i = 1, 2$) homomorfizmusokra teljesülnek a Homomorfizmus lemma (1.1 tétel) feltételei a $G_\cap$ és G_i nyelvtanokra. Tehát

$$L(G_\cap) = h_i(L(G_\cap)) \subseteq L(G_i) \;\; (i = 1, 2) \quad \Longrightarrow L(G_\cap) \subseteq L(G_1) \cap L(G_2).$$

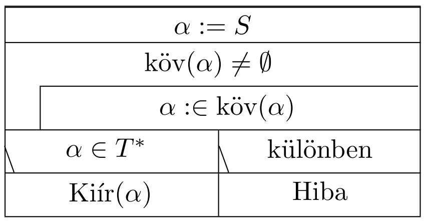
$\mathcal{G}_\cap$, mint minden nyelvtan, 0. típusú, tehát a fentiek bizonyítják $\mathcal{L}_0$ metszetre való zártságát. Továbbá ha G_1 és G_2 1. típusúak, akkor bennük minden levezetés 1-korlátolt. $\mathcal{G}_\cap$-ben egy D levezetés munkaterületére

$$\mathrm{ws}(D) \leq 1 + \widetilde{\ell}(u) + \widetilde{\ell}(u) \leq 3 \cdot \widetilde{\ell}(u)$$

adódik (az első becslésnél az első tag az L nyelvtani jel hossza, a másik kettő az S_1 illetve S_2-ből való 1-korlátolt levezetésből adódik). Tehát ekkor $\mathcal{G}_\cap$ 3-korlátolt nyelvtan, így az 1.7 és 1.8 tételek szerint $L(G_\cap)$ generálható $\mathcal{G}_1$-beli nyelvtannal. □

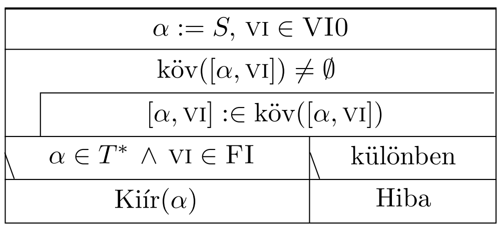
2. Programozott nyelvtanok

A közönséges nyelvtanok működése a következő programsémával modellezhető:



Itt $\text{köv}(\alpha) = \{\beta \mid \alpha \underset{G}{\rightarrow} \beta\}$. A ciklusmagban történő nemdeterminisztikus értékadás a kulcsa a levezetések sokszínűségének.

Ezt a sémát úgy szeretnénk általánosítani, hogy a nyelvtan működését nem csak egy α mondatformával, hanem egy $[\alpha, \text{VI}]$ konfigurációval írjuk le, ahol VI valamilyen vezérlési információ. Legyen adott a bemeneti vezérlési információk VI0 halmaza valamint a kimeneti vezérlési információk FI halmaza, továbbá $\text{köv}([\alpha, \text{VI}]) = \{[\beta, \text{VI}'] \mid [\alpha, \text{VI}] \underset{G}{\rightarrow} [\beta, \text{VI}']\}$, akkor az általánosított séma:



Ennek az általánosított sémának megfelelően működnek a programozott nyelvtanok.

2.1. Előfordulásellenőrzés nélküli programozott nyelvtanok

2.1. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \text{lab}, \sigma \rangle$ hetest programozott nyelvtannak nevezünk, ha a kövezkezők teljesülnek. $\langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$ egy nyelvtan, ekkor T-t, N-t, $\mathcal{P}$-t és S-t rendre* *a programozott nyelvtan ábécéjének, a nyelvtani jelek ábécéjének, szabályhalmazának illetve kezdőszimbólumának nevezzük.* F *(*$\mathrm{exit} \notin F$*) egy véges halmaz, a címkék halmaza.* $\mathrm{lab} : F \to \mathcal{P}$ *mindenütt értelmezett címkéző függvény. Továbbá* $\sigma : F \to 2^{F \cup \{\mathrm{exit}\}}$ *mindenütt értelmezett rákövetkezési függvény.*

2.2. definíció. *Legyen* $\alpha \in (T \cup N)^*$ *és* $f \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$*, ekkor* $[\alpha, f]$*-et a programozott nyelvtan egy konfigurációjának nevezzük.*

Legyen $P = p \to q$ egy szabály, ekkor vezessük be a következő jelöléseket a szabály bal- illetve jobboldalára: $\mathrm{bo}(P) := p$, $\mathrm{jo}(P) := q$.

2.3. definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $[\alpha, f]$ *konfigurációból közvetlen (1-lépéses) konfigurációátmenettel levezethető a* $[\beta, f']$ *konfiguráció (*$\alpha, \beta \in (T \cup N)^*, f \in F, f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$*), ha létezik olyan* $\gamma_1, \gamma_2 \in (T \cup N)^*$*, melyre* $\alpha = \gamma_1 \,\mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f))\gamma_2$*,* $\beta = \gamma_1 \,\mathrm{jo}(\mathrm{lab}(f))\gamma_2$ *és* $f' \in \sigma(f)$*. A közvetlen konfigurációátmenet jelölése:* $[\alpha, f] \underset{G}{\to} [\beta, f']$*.*

2.4. definíció. *A közvetett konfigurációátmenet a közvetlen konfigurációátmenet reflexív, tranzitív lezártja, jelölése* $\overset{*}{\underset{G}{\to}}$*. A levezetés (azaz közvetett konfigurációátmenet) hosszán a levezetés során alkalmazott közvetlen konfigurációátmenetek* $n \in \mathbb{N}$ *számát értjük.* n *lépéses levezetés jelölése* $\overset{n}{\underset{G}{\to}}$*.*

2.5. definíció. *A* G *programozott nyelvtan által generált nyelv:*

$$L(G) = \{u \in T^* \mid \exists\, f \in F, f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}, [S, f] \overset{*}{\underset{G}{\to}} [u, f']\}.$$

A programozott nyelvtanokban tehát a vezérlési információ a következő végrehajtandó szabály címkéje, míg $\mathrm{VI0} = \{f \in F \mid \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) = S\}$, $\mathrm{FI} = F \cup \{\mathrm{exit}\}$.

2.6. definíció. *Egy* $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \mathrm{lab}, \sigma\rangle$ *programozott nyelvtan* i*. típusú, ha* $\langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle$ *a lehető legáltalánosabb értelemben vett* i*. típusú nyelvtan.*

Jelölje $\mathcal{G}_i^{\mathrm{P}}$ az i. típusú programozott nyelvtanok összességét. Legyen továbbá $\mathcal{P}_i := \{L \mid \exists\, G \in \mathcal{G}_i^{\mathrm{P}}$ és $L(G) = L\}$.

1. példa:

$f_0:$	$S \to ABC$	f_1, f_4
$f_1:$	$A \to aA$	f_2
$f_2:$	$B \to bB$	f_3
$f_3:$	$C \to cC$	f_1, f_4
$f_4:$	$A \to a$	f_5
$f_5:$	$B \to b$	f_6
$f_6:$	$C \to c$	exit

Példa levezetésre:

$[S, f_0] \underset{G}{\rightarrow} [ABC, f_1] \underset{G}{\rightarrow} [aABC, f_2] \underset{G}{\rightarrow} [aAbBC, f_3] \underset{G}{\rightarrow} [aAbBcC, f_4] \underset{G}{\rightarrow} [aabBcC, f_5] \underset{G}{\rightarrow} [aabbcC, f_6] \underset{G}{\rightarrow} [aabbcc, \text{exit}]$.

A programozott nyelvtan által generált nyelv: $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

2. példa:

$f_0:$	$S \to X_1X_2$	$\{f_t \mid t \in T\} \cup \{f_\varepsilon\}$	
$f_t:$	$X_1 \to tX_1$	f'_t	$(t \in T)$
$f'_t:$	$X_2 \to tX_2$	$\{f_t \mid t \in T\} \cup \{f_\varepsilon\}$	$(t \in T)$
f_ε	$X_1 \to \varepsilon$	f'_ε	
f'_ε	$X_2 \to \varepsilon$	exit	

$L(G) = \{uu \mid u \in T^*\}$

Minden nyelvtan tekinthető egyben programozott nyelvtannak is. Legyen ugyanis T, N, $\mathcal{P}$, S mint a nyelvtanban, $F = \mathcal{P}$, legyen lab az identitás $\mathcal{P}$-n, továbbá $\sigma(p \to q) = \mathcal{P} \cup \{\text{exit}\}$. Ugyanakkor az előző két példa mutatja, hogy programozott 2. típusú nyelvtanokkal nem csak 2. típusú nyelveket lehet generálni.

2.7. állítás. $\mathcal{P}_i \supseteq \mathcal{L}_i \ (i = 0, 1, 2, 3), \mathcal{P}_2 \supset \mathcal{L}_2$.

Másrészt a 0., 1., 3. típusú nyelvtanok programozási lehetősége nem bővíti a generált nyelvek körét.

2.8. tétel. $\mathcal{P}_3 = \mathcal{L}_3$.

Bizonyítás. Azt kell tehát belátni, hogy ha $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \text{lab}, \sigma\rangle \in \mathcal{G}_3^{\mathrm{P}}$, akkor létezik $G' \in \mathcal{G}_3$, hogy $L(G') = L(G)$.

Legyen $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S'\rangle$, ahol $N' = \{A_f\}_{A \in N, f \in F \cup \{\text{exit}\}} \cup \{S'\}$, $\mathcal{P}'$-t pedig a következőképpen definiáljuk.

$$\begin{aligned} A_f \to uB_{f'} \in \mathcal{P}' &\iff \text{lab}(f) = A \to uB,\ f' \in \sigma(f), \\ A_f \to u\ \in \mathcal{P}' &\iff \text{lab}(f) = A \to u,\ \sigma(f) \neq \emptyset, \\ S' \to S_f\ \in \mathcal{P}' &\iff \text{bo}(\text{lab}(f)) = S. \end{aligned}$$

1. Állítás: Legyen $A, B \in N$, $u \in T^*$, $f \in F$, $\bar{f} \in F \cup \{\text{exit}\}$, ekkor

$$[A, f] \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} [uB, \bar{f}] \iff A_f \overset{*}{\underset{G'}{\rightarrow}} uB_{\bar{f}}.$$

Ezt a G-beli levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk. Ha a levezetés hossza 1, azaz $[A, f] \underset{G}{\rightarrow} [uB, \bar{f}]$, akkor

$[A, f] \underset{G}{\rightarrow} [uB, \bar{f}] \iff \text{lab}(f) = A \to uB \wedge \bar{f} \in \sigma(f) \iff A_f \to uB_{\bar{f}} \in \mathcal{P}' \iff A_f \underset{G'}{\rightarrow} uB_{\bar{f}}$.

Tegyük fel, hogy legfeljebb n hosszú levezetésekre igaz az állítás.

$[A,f] \xrightarrow[G]{n+1} [uB,\bar{f}] \iff \exists\, C \in N,\ u' \in T^*,\ g \in F,\ ([A,f] \xrightarrow[G]{n} [u'C,g] \xrightarrow[G]{} [uB,\bar{f}]) \iff A_f \xrightarrow[G']{n} u'C_g \wedge \mathrm{lab}(g) = C \to u''B,\ u = u'u'',\ \bar{f} \in \sigma(g) \iff A_f \xrightarrow[G']{n} u'C_g \wedge C_g \xrightarrow[G']{} u''B_{\bar{f}} \iff A_f \xrightarrow[G']{n+1} uB_{\bar{f}}$.

2. Állítás: Legyen $B \in N$, $v \in T^*$, $\bar{f} \in F$, $f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$, ekkor

$$[B,\bar{f}] \xrightarrow[G]{} [v,f'] \iff B_{\bar{f}} \xrightarrow[G']{} v.$$

Ezt az előzőekhez hasonlóan láthatjuk be.

$[B,\bar{f}] \xrightarrow[G]{} [v,f'] \iff \mathrm{lab}(f) = B \to v \wedge f' \in \sigma(\bar{f}) \iff B_{\bar{f}} \to v \in \mathcal{P}',\ \sigma(f) \neq \emptyset \iff B_{\bar{f}} \xrightarrow[G']{} v$.

Az 1. és 2. állításokból kapjuk, hogy $A \in N$, $w \in T^*$, $f \in F$, $f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$ esetén

$$[A,f] \xrightarrow[G]{*} [w,f'] \iff A_f \xrightarrow[G']{*} w.$$

Tehát

$u \in L(G) \iff \exists\, f \in F,\ f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}\ ([S,f] \xrightarrow[G]{*} [u,f']) \iff \exists\, f \in F\ (S' \to S_f \in \mathcal{P}' \wedge S_f \xrightarrow[G']{*} u) \iff S' \xrightarrow[G']{*} u \iff u \in L(G)$. □

2.9. tétel. $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i\ (i = 0,1)$.

Bizonyítás. Azt kell tehát belátni, hogy ha $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \mathrm{lab}, \sigma\rangle \in \mathcal{G}_i^{\mathrm{P}}\ (i = 0,1)$, akkor létezik $G' \in \mathcal{G}_i$, hogy $L(G') = L(G)$.

Legyen $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S'\rangle$, ahol $N' = N \cup \{X_f\}_{f \in F \cup \{\mathrm{exit}\}} \cup \{S'\}$, $\mathcal{P}'$-t pedig a következőképpen definiáljuk.

$$\begin{aligned}
X_f p \to X_g q \in \mathcal{P}' &\iff \mathrm{lab}(f) = p \to q,\ g \in \sigma(f), \qquad (*)\\
\left.\begin{aligned} X_f Z \to Z X_f \in \mathcal{P}' \\ Z X_f \to X_f Z \in \mathcal{P}' \end{aligned}\right\} &\iff f \in F \cup \{\mathrm{exit}\},\ Z \in T \cup N,\\
X_f \to \varepsilon \in \mathcal{P}' &\iff f \in F \cup \{\mathrm{exit}\},\\
S' \to S X_f \in \mathcal{P}' &\iff \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) = S.
\end{aligned}$$

Legyen $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$, $f \in F$, $\bar{f} \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$, ekkor

$$[\alpha,f] \xrightarrow[G]{*} [\beta,\bar{f}] \iff \alpha X_f \xrightarrow[G']{*} \beta X_{\bar{f}}.$$

A G-beli levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval elegendő belátni, hogy

$$[\alpha,f] \xrightarrow[G]{n} [\beta,\bar{f}] \iff \alpha X_f \xrightarrow[G']{*} \beta X_{\bar{f}} \wedge \text{ (*) alakú szabályt } n\text{-szer alkalmaztunk.}$$

Ha a levezetés hossza 1, azaz $[\alpha,f] \xrightarrow[G]{} [\beta,\bar{f}]$, akkor

$[\alpha,f] \xrightarrow[G]{} [\beta,\bar{f}] \iff \exists\, \gamma_1,\gamma_2 \in (T \cup N)^*, \alpha = \gamma_1 p \gamma_2, \beta = \gamma_1 q \gamma_2, \mathrm{lab}(f) = p \to q \wedge \bar{f} \in \sigma(f) \iff \alpha = \gamma_1 p \gamma_2, \beta = \gamma_1 q \gamma_2, X_f p \to X_{\bar{f}} q \in \mathcal{P}' \iff \alpha X_f \xrightarrow[G']{*} \beta X_{\bar{f}} \wedge$ (*) alakú szabályt egyszer alkalmaztunk.

Tegyük fel, hogy legfeljebb n hosszú levezetésekre igaz az állítás.

$[\alpha, f] \underset{G}{\overset{n+1}{\longrightarrow}} [\beta, \bar{f}] \iff \exists\, \beta' \in (T \cup N)^*,\ g \in F,\ ([\alpha, f] \underset{G}{\overset{n}{\rightarrow}} [\beta', g] \underset{G}{\rightarrow} [\beta, \bar{f}]) \iff \alpha X_f \underset{G'}{\overset{*}{\rightarrow}} \beta' X_g \ \wedge\ \beta' X_g \underset{G'}{\overset{*}{\rightarrow}} \beta X_{\bar{f}} \ \wedge$ (*) alakú szabályt $(n+1)$-szer alkalmaztunk $\iff \alpha X_f \underset{G'}{\overset{*}{\rightarrow}} \beta X_{\bar{f}} \ \wedge$ (*) alakú szabályt $(n+1)$-szer alkalmaztunk.

Mivel $X_f \to \varepsilon \in \mathcal{P}'$ és terminális szót csak ezen szabály alkalmazásával kaphatunk, ezért ha $\alpha \in (T \cup N)^*$, $w \in T^*$, $\bar{f} \in F$, $f' \in F \cup \{\text{exit}\}$, akkor

$$[\alpha, f] \underset{G}{\overset{*}{\rightarrow}} [w, f'] \iff \alpha X_f \underset{G'}{\overset{*}{\rightarrow}} w.$$

Tehát

$u \in L(G) \iff \exists\, f \in F,\ f' \in F \cup \{\text{exit}\}\ ([S, f] \underset{G}{\overset{*}{\rightarrow}} [u, f']) \iff \exists\, f \in F\ (S' \to S X_f \in \mathcal{P}' \ \wedge\ S X_f \underset{G'}{\overset{*}{\rightarrow}} u) \iff S' \underset{G'}{\overset{*}{\rightarrow}} u \iff u \in L(G).$

G', mint minden nyelvtan, 0. típusú, tehát a fentiek bizonyítják a 0. típusra vonatkozó állítást. Ha G 1. típusú, akkor benne u minden D levezetésére $\text{ws}(D) \leq \widetilde{\ell}(u)$, ahol $\text{ws}(D)$-t a konfigurációk mondatforma komponense alapján számoljuk. Ha G'-ben az u D-nek megfelelő levezetését D'-vel jelöljük, akkor ennek munkaterületére

$$\text{ws}(D') \leq 1 + \text{ws}(D) \leq 1 + \widetilde{\ell}(u) \leq 2 \cdot \widetilde{\ell}(u)$$

(a $+1$ az X_f többletjelből adódik). Ekkor G' 2-korlátolt nyelvtan, így az 1.7 és 1.8 tételek szerint $L(G')$ generálható $\mathcal{G}_1$-beli nyelvtannal.

□

2.2. Előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtanok

2.10. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \text{lab}, \sigma, \varphi \rangle$ nyolcast előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtannak nevezünk, ha a következők teljesülnek. $\langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \text{lab}, \sigma \rangle$ egy programozott nyelvtan, ekkor T-t, N-t, $\mathcal{P}$-t, S-t F-t,*lab*-t valamint σ-t rendre az előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtan ábécéjének, a nyelvtani jelek ábécéjének, szabályhalmazának, kezdőszimbólumának, címkehalmazának, címkéző függvényének illetve pozitív rákövetkezési függvényének nevezzük. Továbbá $\varphi : F \to 2^{F \cup \{\text{exit}\}}$ mindenütt értelmezett függvény, melyet negatív rákövetkezési függvénynek hívunk.*

2.11. definíció. *Legyen $\alpha \in (T \cup N)^*$ és $f \in F \cup \{\text{exit}\}$, ekkor $[\alpha, f]$-et az előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtan egy konfigurációjának nevezzük.*

2.12. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $[\alpha, f]$ konfigurációból közvetlen (1-lépéses) konfigurációátmenettel előfordulásellenőrzés nélkül levezethető a $[\beta, f']$ konfiguráció, jelölése: $[\alpha, f] \underset{G}{\rightarrow} [\beta, f']$ $(\alpha, \beta \in (T \cup N)^*, f \in F, f' \in F \cup \{\text{exit}\})$, ha $[\alpha, f] \underset{G'}{\rightarrow} [\beta, f']$, ahol $G' = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \text{lab}, \sigma \rangle$ az előfordulásellenőrzés nélküli programozott nyelvtan. $[\alpha, f]$-*

ből közvetlen (1-lépéses) konfigurációátmenettel előfordulásellenőrzéssel levezethető $[\beta, f']$, *jelölése:* $[\alpha, f] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [\beta, f']$, *ha* $[\alpha, f] \underset{G}{\rightarrow} [\beta, f']$ *vagy* $\mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) \nsubseteq \alpha$, $\alpha = \beta$ *és* $g \in \varphi(f)$.

2.13. definíció. *A(z előfordulásellenőrzéses) közvetett konfigurációátmenet a közvetlen konfigurációátmenet reflexív, tranzitív lezártja, jelölése* $\overset{*}{\underset{G(,ac)}{\longrightarrow}}$. *A levezetés (azaz közvetett konfigurációátmenet) hosszán a levezetés során alkalmazott közvetlen konfigurációátmenetek* $n \in \mathbb{N}$ *számát értjük.* n *lépéses (előfordulásellenőrzéses) levezetés jelölése* $\overset{n}{\underset{G(,ac)}{\longrightarrow}}$.

2.14. definíció. *A* G *előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtan által (előfordulásellenőrzéssel) generált nyelv:*

$$L^{(\mathrm{ac})}(G) = \{u \in T^* \mid \exists f \in F, f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}, [S, f] \overset{*}{\underset{G(,\mathrm{ac})}{\longrightarrow}} [u, f']\}.$$

2.15. definíció. *Egy* $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \mathrm{lab}, \sigma, \varphi\rangle$ *előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtan* i*. típusú, ha* $\langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle$ *a lehető legáltalánosabb értelemben vett* i*. típusú nyelvtan.*

Jelölje $\mathcal{G}_i^{\mathrm{P,\,ac}}$ az i. típusú előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtanok összességét. Legyen továbbá $\mathcal{P}_i^{\mathrm{ac}} := \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i^{\mathrm{P,\,ac}}$ és $L^{\mathrm{ac}}(G) = L\}$.

1. példa:

		σ	φ
$f_1:$	$S \to ZZ$	f_1	f_2
$f_2:$	$Z \to S$	f_2	f_1, f_3
$f_3:$	$S \to a$	f_3	exit

$L(G) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. példa:

		σ	φ
$f_1:$	$S \to SS$	f_1, f_2	
$f_2:$	$S \to AAB$	f_2	f_3
$f_3:$	$A \to \varepsilon$	f_4	exit
$f_4:$	$B \to \varepsilon$	f_5	
$f_5:$	$A \to a$	f_5	f_6
$f_6:$	$B \to S$	f_6	f_2

Példa levezetésre:
$[S, f_1] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [SSS, f_2] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [AABAABAAB, f_3] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [AAABAAB, f_5] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [aaaBaaB, f_6] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}}$
$[aaaSaaS, f_2] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [aaaAABaaAAB, f_3] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [aaaAaaAAB, f_5] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [aaaaaaaaB, f_6] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}$

$[aaaaaaaaS, f_2] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [aaaaaaaaAAB, f_3] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [aaaaaaaaA, f_5] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [aaaaaaaaa, f_2] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [aaaaaaaaa, f_3] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [aaaaaaaaa, \mathrm{exit}]$.

$(n-1)$ helyett n darab S generálása a levezetés elején $(2n-1)$-gyel több a-t eredményez. Mivel $n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, ezért $L(G) = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$.

Világos, hogy minden előfordulásellenőrzés nélküli programozott nyelvtan tekinthető előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtannak, ha kiegészítjük a $\varphi \equiv \emptyset$ negatív rákövetkezési függvénnyel. Ezért minden $i = 0, 1, 2, 3$ mellett $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_i^{\mathrm{ac}}$.

2.16. tétel. $\mathcal{P}_3^{\mathrm{ac}} = \mathcal{L}_3$.

Bizonyítás. Azt elegendő belátni, hogy ha $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \mathrm{lab}, \sigma, \varphi\rangle \in \mathcal{G}_3^{\mathrm{P,\,ac}}$, akkor létezik $G' \in \mathcal{G}_3$, hogy $L(G') = L^{\mathrm{ac}}(G)$.

Legyen $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S'\rangle$, ahol $N' = \{A_f\}_{A\in N, f\in F\cup\{\mathrm{exit}\}} \cup \{S'\}$, $\mathcal{P}'$-t pedig a következőképpen definiáljuk.

$$\begin{aligned}
A_f \to uB_{f'} \in \mathcal{P}' &\iff \mathrm{lab}(f) = A \to uB,\ f' \in \sigma(f),\\
A_f \to u \in \mathcal{P}' &\iff \mathrm{lab}(f) = A \to u,\ \sigma(f) \neq \emptyset,\\
C_f \to C_g \in \mathcal{P}' &\iff \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) \neq C,\ g \in \varphi(f),\\
S' \to S_f \in \mathcal{P}' &\iff \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) = S.
\end{aligned}$$

1. Állítás: Legyen $A, B \in N$, $u \in T^*$, $f \in F$, $\bar f \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$, ekkor

$$[A, f] \overset{*}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [uB, \bar f] \iff A_f \overset{*}{\underset{G'}{\to}} uB_{\bar f}.$$

Ezt a G-beli levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk. Ha a levezetés hossza 1, azaz $[A, f] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [uB, \bar f]$, akkor

$[A, f] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [uB, \bar f] \iff \mathrm{lab}(f) = A \to uB \wedge \bar f \in \sigma(f) \vee A = uB \wedge \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) \neq A, \wedge \bar f \in \varphi(f) \iff A_f \to uB_{\bar f} \in \mathcal{P}' \vee A = uB \wedge A_f \underset{G'}{\to} A_{\bar f} \iff A_f \underset{G'}{\to} uB_{\bar f}$.

Tegyük fel, hogy legfeljebb n hosszú levezetésekre igaz az állítás.

$[A, f] \overset{n+1}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [uB, \bar f] \iff \exists C \in N,\ u' \in T^*,\ g \in F,\ ([A, f] \overset{n}{\underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow}} [u'C, g] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [uB, \bar f]) \iff A_f \overset{n}{\underset{G'}{\to}} u'C_g \wedge (\mathrm{lab}(g) = C \to u''B,\ u = u'u'',\ \bar f \in \sigma(g) \vee u' = u,\ C = B,\ \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(g)) \neq B,\ \bar f \in \varphi(g)) \iff A_f \overset{n}{\underset{G'}{\to}} u'C_g \wedge (C_g \underset{G'}{\to} u''B_{\bar f} \vee u' = u,\ C = B,\ B_g \underset{G'}{\to} B_{\bar f}) \iff A_f \overset{n+1}{\underset{G'}{\to}} uB_{\bar f}$.

2. Állítás: Legyen $B \in N$, $v \in T^*$, $\bar f \in F$, $f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$, ekkor

$$[B, \bar f] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [v, f'] \iff B_{\bar f} \underset{G'}{\to} v.$$

Itt előfordulásellenőrzéses konfigurációátmenet valójában nem történhet negatív rákövetkezési függvénnyel, mivel $B = v$ nem állhat fenn.

$[B, \bar f] \underset{G,\mathrm{ac}}{\longrightarrow} [v, f'] \iff [B, \bar f] \underset{G}{\to} [v, f'] \iff \mathrm{lab}(f) = B \to v \wedge f' \in \sigma(\bar f) \iff B_{\bar f} \to v \in \mathcal{P}',\ \sigma(f) \neq \emptyset \iff B_{\bar f} \underset{G'}{\to} v$.

Az 1. és 2. állításokból kapjuk, hogy $A \in N$, $w \in T^*$, $f \in F$, $f' \in F \cup \{\text{exit}\}$ esetén

$$[A, f] \xrightarrow[G,\text{ac}]{*} [w, f'] \iff A_f \xrightarrow[G']{*} w.$$

Tehát

$u \in L^{\text{ac}}(G) \iff \exists\, f \in F,\, f' \in F \cup \{\text{exit}\}\ ([S, f] \xrightarrow[G,ac]{*} [u, f']) \iff \exists\, f \in F\ (S' \to S_f \in \mathcal{P}' \wedge S_f \xrightarrow[G']{*} u) \iff S' \xrightarrow[G']{*} u \iff u \in L(G)$. □

A $\mathcal{P}_0^{\text{ac}}$ és $\mathcal{P}_1^{\text{ac}}$ nyelvosztályok vizsgálatához szükségünk van valamilyen mintafelismerő eszközre.

2.17. definíció. (Knuth-Morris-Pratt (KMP) automata) *Legyen $m \in T^*$ egy szó. Az $m = m_1 m_2 \cdots m_{\ell(m)}$ mintához tartozó $\mathcal{A}^m$ Knuth-Morris-Pratt automata (vagy röviden KMP automata) a következő. $\mathcal{A}^m = \langle \{q_i\}_{0 \le i \le \ell(m)}, T, \delta^m, q_0, \{q_{\ell(m)}\} \rangle$, ahol*

$$\delta^m(q_i, x) = q_j \iff j = \begin{cases} \ell(m) & i = \ell(m) \\ \max\{\ell(w) \mid w \in \text{Pre}(m) \cap \text{Suf}(m_1 \cdots m_i x)\} & i < \ell(m) \end{cases}.$$

2.18. állítás. $L(\mathcal{A}^m) = \{u \in T^* \mid m \subseteq u\}$.

Bizonyítás. A KMP automata csak az m mintát tartalmazó szavakat tudja felismerni, hiszen mivel $q_{\ell(m)}$ az egyetlen elfogadó állapot és oda csak $q_{\ell(m)-1}$-ből juthatunk, ezért minden elfogadott szónak van egy olyan $x \in T$ betűje melyre $\mathcal{A}^m$ a működése során a $q_{\ell(m)-1}$ állapotból a $q_{\ell(m)}$ állapotba lép, azaz $\delta^m(q_{\ell(m)-1}, x) = q_{\ell(m)}$. Ez azt jelenti, hogy az x előtti $\ell(m) - 1$ betű és x együtt kiadják az m mintát.

Másrészt, ha $u = v_1 m v_2$, $v_1, v_2 \in T^*$, akkor u-t felismeri az $\mathcal{A}^m$ automata, hiszen $v_1 m$ elolvasása után az automata aktuális állapota $q_{\ell(m)}$ és ez nem változik v_2 betűinek olvasására. □

2.19. tétel. $\mathcal{P}_i^{\text{ac}} = \mathcal{L}_i$ $(i = 0, 1)$.

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy ha $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \text{lab}, \sigma, \varphi \rangle \in \mathcal{P}_i^{\text{ac}}$, akkor létezik $G' \in \mathcal{G}_i$, melyre $L(G') = L^{\text{ac}}(G)$ $(i = 0, 1)$.

Legyen $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S' \rangle$, ahol

$$N' = N \cup \{X_f\}_{f \in F \cup \{\text{exit}\}} \cup \{q_i^f\}_{f \in F, 0 \le i \le \ell(\text{bo}(\text{lab}(f)))} \cup \{S', L, R\},$$

$\mathcal{P}'$-t pedig a következőképpen definiáljuk (δ^{m_f} a a $T \cup N$ ábécé feletti $m_f = \text{bo}(\text{lab}(f))$ mintához tartozó KMP automata átmenetfüggvénye):

$$X_f p \to X_g q \in \mathcal{P}' \iff \text{lab}(f) = p \to q,\ g \in \sigma(f), \tag{*}$$

$$\left.\begin{aligned} X_f Z \to Z X_f \in \mathcal{P}' \\ Z X_f \to X_f Z \in \mathcal{P}' \end{aligned}\right\} \iff f \in F \cup \{\text{exit}\},\ Z \in T \cup N,$$

$$X_f \to \varepsilon \in \mathcal{P}' \iff f \in F \cup \{\text{exit}\},$$

$$
\begin{aligned}
S' \to LSX_fR &\in \mathcal{P}' \iff \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) = S,\\
LX_f \to Lq_0^f &\in \mathcal{P}' \iff f \in F, \qquad\qquad (**)\\
q_j^f Z \to Z\delta^{m_f}(q_j^f, Z) &\in \mathcal{P}' \iff f \in F, Z \in T \cup N, 0 \le j \le \ell(m_f),\\
q_j^f R \to X_g R &\in \mathcal{P}' \iff f \in F, g \in F \cup \{\mathrm{exit}\}, 0 \le j \le \ell(m_f) - 1, g \in \varphi(f),\\
L \to \varepsilon, R \to \varepsilon &\in \mathcal{P}'.
\end{aligned}
$$

Legyen $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$, $f \in F$, $\bar{f} \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$, ekkor

$$[\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{*} [\beta, \bar{f}] \iff L\alpha X_f R \xrightarrow[G']{*} L\beta X_{\bar{f}} R.$$

A G-beli levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval elegendő belátni, hogy

$[\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{n} [\beta, \bar{f}] \iff L\alpha X_f R \xrightarrow[G']{*} L\beta X_{\bar{f}} R \wedge$ (*) vagy (**) alakú szabályt n-szer alkalmaztunk.

Ha a levezetés hossza 1, azaz $[\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{} [\beta, \bar{f}]$, akkor

$[\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{} [\beta, \bar{f}] \iff \exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in (T \cup N)^*, \alpha = \gamma_1 p \gamma_2, \beta = \gamma_1 q \gamma_2, \mathrm{lab}(f) = p \to q \wedge \bar{f} \in \sigma(f) \vee \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) \not\subseteq \alpha \wedge \alpha = \beta \wedge \bar{f} \in \varphi(f) \iff \alpha = \gamma_1 p \gamma_2, \beta = \gamma_1 q \gamma_2, X_f p \to X_{\bar{f}} q \in \mathcal{P}' \vee \alpha = \beta \wedge \delta^{m_f}(q_0^f, \alpha) \neq q_{\ell(m_f)}^f \wedge \bar{f} \in \varphi(f) \iff L\alpha X_f R \xrightarrow[G']{*} L\beta X_{\bar{f}} R \wedge$ (*) vagy (**) alakú szabályt egyszer alkalmaztunk.

Tegyük fel, hogy legfeljebb n hosszú levezetésekre igaz az állítás.

$[\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{n+1} [\beta, \bar{f}] \iff \exists\, \beta' \in (T \cup N)^*$, $g \in F$, $([\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{n} [\beta', g] \xrightarrow[G,ac]{} [\beta, \bar{f}]) \iff L\alpha X_f R \xrightarrow[G']{*} L\beta' X_g R \wedge L\beta' X_g R \xrightarrow[G']{*} L\beta X_{\bar{f}} R \wedge$ (*) vagy (**) alakú szabályt $(n+1)$-szer alkalmaztunk $\iff L\alpha X_f \xrightarrow[G']{*} R\beta L X_{\bar{f}} R \wedge$ (*) vagy (**) alakú szabályt $(n+1)$-szer alkalmaztunk.

Mivel $X_f \to \varepsilon \in \mathcal{P}'$ és terminális szót csak ezen szabály alkalmazásával kaphatunk, ezért ha $\alpha \in (T \cup N)^*$, $w \in T^*$, $\bar{f} \in F$, $f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$, akkor

$$[\alpha, f] \xrightarrow[G,ac]{*} [w, f'] \iff L\alpha X_f R \xrightarrow[G']{*} LwR.$$

Tehát

$u \in L^{\mathrm{ac}}(G) \iff \exists\, f \in F$, $f' \in F \cup \{\mathrm{exit}\}$ $([S, f] \xrightarrow[G,ac]{*} [u, f']) \iff \exists\, f \in F$ $(S' \to LSX_fR \in \mathcal{P}' \wedge LSX_fR \xrightarrow[G']{*} LuR) \iff S' \xrightarrow[G']{*} u \iff u \in L(G)$.

G', mint minden nyelvtan, 0. típusú, tehát a fentiek bizonyítják a 0. típusra vonatkozó állítást. Ha G 1. típusú, akkor a 2.9 tételben látottt érvelést követve van $u \in L(G')$-nek olyan D' G'-beli levezetése, melyre

$$\mathrm{ws}(D') \le 3 + \mathrm{ws}(D) \le 3 + \widetilde{\ell}(u) \le 4 \cdot \widetilde{\ell}(u),$$

ahol a $+3$ az L, R, és az egyszerre nem előforduló X_f illetve q_j^f többletjelekből adódik. Tehát ekkor G' 4-korlátolt nyelvtan, így az 1.7 és 1.8 tételek szerint $L(G')$ generálható $\mathcal{G}_1$-beli nyelvtannal. □

2.20. tétel. $\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}} = \mathcal{L}_0$.

Bizonyítás. $\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}} \subseteq \mathcal{P}_0^{\mathrm{ac}} = \mathcal{L}_0$. Elegendő tehát belátni, hogy tetszőleges $G = \langle T, N, \mathcal{P} = \{p_1 \to q_1, \ldots, p_k \to q_k\}, S\rangle \in \mathcal{G}_0$ nyelvtanhoz létezik G' 2. típusú előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtan, melyre $L^{\mathrm{ac}}(G') = L(G)$.

Ehhez azt használjuk ki, hogy előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtanokban lehet számolni. Egy X változónak, mely nemnegatív egész értékeket vehet fel, megfelel egy X nemterminális, melynek a mondatformában való előfordulásának száma a változó értéke.

Az első lépésben definiáljuk a mondatformáknak egy természetes számokkal való kódolását és megadjuk a kódolást és dekódolást elvégző algoritmusokat.

Definiáljuk tehát a G-beli mondatformák egy természetes számmal való kódolását (és visszakódolását) a következőképpen. Legyen $M = |T \cup N| + 1$ valamint $\mathrm{kod} : T \cup N \to \{1, \ldots, M-1\}$ egy tetszőleges bijekció. Legyen

$$\widehat{\mathrm{kod}}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha = \varepsilon \\ M \cdot \widehat{\mathrm{kod}}(\alpha') + \mathrm{kod}(z) & \alpha = \alpha' z \end{cases}.$$

$\widehat{\mathrm{kod}}$ a kod függvény kiterjesztése, ezért a továbbiakban elhagyjuk a $\widehat{\ }$-t. Továbbá az is teljesül, hogy $\mathrm{kod}(\alpha)$ M-áris alakjában nincs 0 számjegy, ha $\alpha \neq \varepsilon$. kod tényleg kódolás, a következőképpen kapható vissza a mondatforma a kódból:

$$\mathrm{kod}^{-1}(n) = \begin{cases} \varepsilon & n = 0 \\ \mathrm{kod}^{-1}(n')\,\mathrm{kod}^{-1}(m) & n = M \cdot n' + m,\ 1 \leq m \leq M-1 \end{cases}.$$

Tehát egy $\alpha \in (T \cup N)^*$ mondatforma $X \in \mathbb{N}$ kódját megadó, illetve az $X \in \mathbb{N}$ kódot egy $\alpha \in (T \cup N)^*$ változóba dekódoló algoritmus:

Kód(α, X)

$X := 0$
$\alpha \neq \varepsilon$
$z := \mathrm{pre}(\alpha, 1)$
$X := M \cdot X + \mathrm{kod}(z)$
$\alpha := \mathrm{suf}(\alpha, \ell(\alpha) - 1)$

Dekód(X, α)

$\alpha := \varepsilon$
$X \neq 0$
$X, B := \lfloor X/M \rfloor, \{X/M\}$
$\alpha := \mathrm{kod}^{-1}(B)\alpha$

Ezek után elkészítünk egy, a közvett levezetéseket számokon szimuláló algoritmust, mely inputként beolvassa egy mondatforma kódját és nemdeterminisztikusan outputként visszaadja egy belőle közvetetten levezethető mondatforma kódját.

A kódfüggvény rekurzív definíciója alapján nemdeterminisztikusan le tudjuk választani egy α mondatforma utolsó néhány (r) betűjét és fordított sorrendben egy γ mondatformában eltárolni, illetve egy γ mondatforma megfordítását α-hoz jobbról hozzákonkatenálni.

Nemdeterminisztikus leválasztás$(\alpha, \gamma) := \mathrm{pre}(\alpha, \ell(\alpha) - r), \mathrm{suf}(\alpha, r)^{-1}$

Hozzáírás$(\alpha, \gamma) := \alpha\gamma^{-1}$

A nemdeterminisztikus leválasztást és a hozzáírást a kódokon megvalósító algoritmusok ($X = \mathrm{kod}(\alpha)$ és $Y = \mathrm{kod}(\gamma)$):

NLevál(X, Y)

$X, B := \lfloor X/M \rfloor, \{X/M\}$
$Y := MY + B$

Hozzá(X, Y)

$Y \neq 0$
$Y, B := \lfloor Y/M \rfloor, \{Y/M\}$
$X := MX + B$

Továbbá szükségünk van q meghatározására, ha p egy szabály baloldala, és $p \to q \in \mathcal{P}$. Legyen $P = \mathrm{kod}(p)$, ekkor P-t lenullázzuk és $Q = \mathrm{kod}(q)$ lesz. Az ezt megvalósító szintén nemdeterminisztikus algoritmus (több szabálynak is lehet ugyanaz a baloldala):

Meghat(P, Q)

$P = \mathrm{kod}(p_1^{-1})$		$P = \mathrm{kod}(p_i^{-1})$		$P = \mathrm{kod}(p_k^{-1})$
$Q := \mathrm{kod}(q_1^{-1})$ $P := 0$	$\cdots$	$Q := \mathrm{kod}(q_i^{-1})$ $P := 0$	$\cdots$	$Q := \mathrm{kod}(q_k^{-1})$ $P := 0$

Így a következő **Gener**(X) nemdeterminisztikus algoritmus generálja egy egy $\alpha \in (T \cup N)^*$ mondatforma kódját (X-be), melyre $\mathrm{kod}^{-1}(X) \xrightarrow[G]{*} \alpha$. Az algoritmus $\mathrm{kod}^{-1}(X)$-ből valahány G-beli levezetési lépést szimulál a kódokon. Egy $\alpha = \alpha_1 p \alpha_2 \xrightarrow[G]{} \alpha_1 q \alpha_2 = \beta$ levezetési lépés szimulálása esetén a változók jelentései a következők. X amellett, hogy az egyes levezetési lépések szimulálása végén az aktuális mondatforma kódjával egyezik meg, a szimuláció közben a leválasztás után megmaradó mondatforma kódját tároló változó is egyben. Tehát X kezdetben $\mathrm{kod}(\alpha)$-val, a levezetési lépés szimulálása végén $\mathrm{kod}(\beta)$-val egyezik meg. $Y = \mathrm{kod}(\alpha_2^{-1}), P = \mathrm{kod}(p^{-1})$ és $Q = \mathrm{kod}(q^{-1})$.

Gener(X)

NLevál(X, Y)
NLevál(X, P)
Meghat(P, Q)
Hozzá(X, Q)
Hozzá(X, Y)

A második lépésben számfüggvény makrókat hozunk létre, melyek egy 2. típusú előfordulásellenőrzéses nyelvtanban megvalósítják a számunkra szükséges számításokat. A makrók mindig valamilyen α mondatformán működnek, a benne lévő nyelvtani jeleken operálnak. A MAKRÓ$(X_1, \ldots, X_n, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}}^+, f_{\mathrm{KI}}^-)$ makró a következő alakú specifikációnak felel meg.

Leírás	Szabályok				Előfeltétel
	lab		σ	φ	
$\textsc{Null}(X, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}})$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$X \to \varepsilon$	f_{BE}	f_{KI}	
$X{:=}0$					
$\textsc{Add0}(X, Y, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}})$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$Y \to X$	f_{BE}	f_{KI}	
$X{:=}X{+}Y,\ Y{:=}0$					
$\textsc{Add}(X, Y, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}})$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$Y \to XY'$	f_{BE}	f_1	$Y' = 0$
$X{:=}X{+}Y,\ Y{:=}Y$	$f_1:$	$Y' \to Y$	f_1	f_{KI}	
$\textsc{Szor}_M(X, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}})$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$X \to Q^M$	f_{BE}	f_1	$Q = 0$
$X{:=}X \cdot M$	$f_1:$	$Q \to X$	f_1	f_{KI}	
$\textsc{Oszt}_M(X, Y, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}})$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$X \to XE$	g_0	f_{KI}	$Y = 0$
$X{:=}\lfloor X/M \rfloor,\ Y{:=}\{X/M\}$	$g_0:$	$X \to \varepsilon$	g_1	h_0	$E = 0$
	$g_1:$	$X \to \varepsilon$	g_2	h_1	$Q = 0$
		$\vdots$			
	$g_{M-2}:$	$X \to \varepsilon$	g_{M-1}	h_{M-2}	
	$g_{M-1}:$	$X \to Q$	g_0	h_{M-1}	
	$h_0:$	$E \to \varepsilon$	k		
	$h_1:$	$E \to Y$	k		
		$\vdots$			
	$h_i:$	$E \to Y^i$	k		
		$\vdots$			
	$h_{M-1}:$	$E \to Y^{M-1}$	k		
	$k:$	$Q \to X$	k	f_{KI}	
$\textsc{Beállít}_M(X, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}})$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$X \to Q$	f_0		$X \geq 1$
$X{:=}M$	$f_0:$	$X \to \varepsilon$	f_0	f_1	
	$f_1:$	$Q \to X^M$	f_{KI}		
$\textsc{Egyenlő}_M(X, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}}^+, f_{\mathrm{KI}}^-)$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$X \to X$	f_0	f_0	
$X = M \rightsquigarrow f_{\mathrm{KI}}^+$	$f_0:$	$X \to Z$	f_1	g_-	
$X \neq M \rightsquigarrow f_{\mathrm{KI}}^-$	$f_1:$	$X \to Z$	f_2	g_-	
$X{:=}0$		$\vdots$			
	$f_{M-1}:$	$X \to Z$	f_M	g_-	
	$f_M:$	$X \to Z$	g_-	f_{KI}^+	
	$g_-:$	$X \to Z$	g_-	f_{KI}^-	
$\textsc{NEgyenlő}_M(X, f_{\mathrm{BE}}, f_{\mathrm{KI}}^+, f_{\mathrm{KI}}^-)$	$f_{\mathrm{BE}}:$	$X \to X$	f_0	f_0	
$X \neq M \rightsquigarrow f_{\mathrm{KI}}^+$	$f_0:$	$X \to Z$	f_1	g_-	
$X = M \rightsquigarrow f_{\mathrm{KI}}^-$	$f_1:$	$X \to Z$	f_2	g_-	
$X{:=}0$		$\vdots$			
	$f_{M-1}:$	$X \to Z$	f_M	g_-	
	$f_M:$	$X \to Z$	g_-	f_{KI}^-	
	$g_-:$	$X \to Z$	g_-	f_{KI}^+	

2.1. táblázat. Számfüggvény makrók előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtanokban

Előfeltétel: $X_1 = X_1', \ldots, X_n = X_n' \wedge \text{címke} = f_{\mathrm{BE}}$,
utófeltétel: $X_1, \ldots, X_n := f(X_1', \ldots, X_n') \wedge (\text{címke} = f_{\mathrm{KI}}^{+} \wedge B(X_1', \ldots, X_n') = \top$
$\vee\ \text{címke} = f_{\mathrm{KI}}^{-} \wedge B(X_1', \ldots, X_n') = \bot)$,

ahol $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ függvény és $B : \mathbb{N}^n \to \{\top, \bot\}$ Boole-függvény. Ha B mindig igaz akkor f_{KI}^{-} el is hagyható.

Az aktuális α mondatformában szereplő W nyelvtani jelek számát tekintsük változónak és $\ell_W(\alpha)$ helyett használjuk rá a W jelölést. A makrókban szereplő lokális címkékhez és változókhoz a kifejtés során új, egyedi címkéket és változókat veszünk majd fel. A számunkra szükséges makrókat a 2.1. táblázatban adtuk meg. A változó=0 előfeltételt a Null makróval is biztosíthatjuk.

Végül a harmadik lépésben a **Gener**(X) algoritmust a makrók segítségével megvalósítjuk egy G' 2. típusú előfordulásellenőrzéses nyelvtanban, majd $X = \mathrm{kod}(S)$-el futtatjuk. Végül szükségünk van a kapott mondatforma dekódolására. Az egyes részfeladatok megvalósítása:

NLevál(X, Y)

Oszt$_M(X, B)$
Szor$_M(Y)$
Add$_M(Y, B)$

NLevál(X, P)

Oszt$_M(X, B)$
Szor$_M(P)$
Add$_M(P, B)$

Meghat(P, Q)

Egyenlő$_{\mathrm{kod}(p_1^{-1})}(P)$		Egyenlő$_{\mathrm{kod}(p_i^{-1})}(P)$		Egyenlő$_{\mathrm{kod}(p_i^{-1})}(P)$
Beállít$_{\mathrm{kod}(q_1^{-1})}(Q)$	$\cdots$	Beállít$_{\mathrm{kod}(q_i^{-1})}(Q)$	$\cdots$	Beállít$_{\mathrm{kod}(q_k^{-1})}(Q)$

Hozzá(X, Q)

NEgyenlő$_0(Q)$
Oszt$_M(Q, B)$
Szor$_M(X)$
Add$_M(X, B)$

Hozzá(X, Y)

NEgyenlő$_0(Y)$
Oszt$_M(Y, B)$
Szor$_M(X)$
Add$_M(X, B)$

Dekód(X, α)

NEgyenlő$_0(X)$
Oszt$_M(X, B)$

Egyenlő$_1(B)$		Egyenlő$_i(B)$		Egyenlő$_{M-1}(B)$
$E \to E\,\mathrm{kod}^{-1}(1)$	$\cdots$	$E \to E\,\mathrm{kod}^{-1}(i)$	$\cdots$	$E \to E\,\mathrm{kod}^{-1}(M-1)$

Tekintsük tehát a következő $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S', F, \mathrm{lab}, \sigma, \varphi \rangle$ előfordulásellenőrzéses programozott nyelvtant, ahol $N' = N \cup \{S', E, X, Y, B, P, Q\} \cup \widehat{N}$, $\widehat{N}$ a makrókban előforduló segédjelek halamaza és $F = \{f_i\}_{0\le i\le 21} \cup \{g_i, g_i^+\}_{1\le i\le |T\cup N|} \cup \{h_i, h_i^+\}_{1\le i\le |\mathcal{P}|} \cup \widehat{F},\ \widehat{F}$ a makrókban előforduló segédcímkék halamaza. $\mathcal{P}'$ címkézett szabályai σ-val és φ-vel a következők:

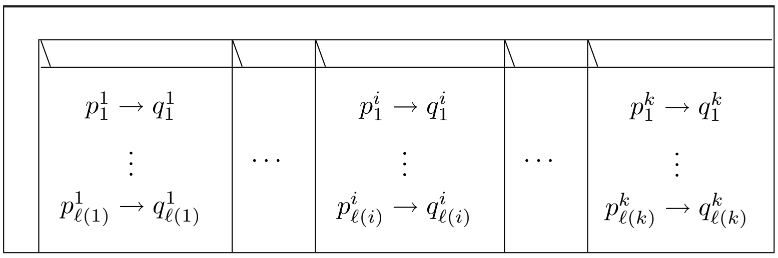
		σ	φ	
$f_0:$	$S' \to X^{\mathrm{kod}(S)}E$	f_1		
$f_1:$	$E \to E$	f_2	f_3	
$f_2:$	$E \to E$	f_4	f_5	
	$\textsc{Oszt}_M(X, B, f_4, f_6)$			
	$\textsc{Szor}_M(Y, f_6, f_7)$			
	$\textsc{Add}(Y, B, f_7, f_2)$			
$f_5:$	$E \to E$	f_8	f_9	
	$\textsc{Oszt}_M(X, B, f_8, f_6)$			
	$\textsc{Szor}_M(P, f_6, f_7)$			
	$\textsc{Add}(P, B, f_7, f_5)$			
$f_9:$	$E \to E$	$h_1, \ldots, h_k$		
	$\textsc{Egyenlő}_{\mathrm{kod}(p_i^{-1})}(P, h_i, h_i^+,\ )$			$(1 \le i \le k)$
	$\textsc{Beállít}_{\mathrm{kod}(q_i^{-1})}(Q, h_i^+, f_{10})$			$(1 \le i \le k)$
	$\textsc{NEgyenlő}_0(Q, f_{10}, f_{11}, f_{12})$			
	$\textsc{Oszt}_M(Q, B, f_{11}, f_{13})$			
	$\textsc{Szor}_M(X, f_{13}, f_{14})$			
	$\textsc{Add}(X, B, f_{14}, f_{10})$			
	$\textsc{NEgyenlő}_0(Y, f_{12}, f_{15}, f_{16})$			
	$\textsc{Oszt}_M(Y, B, f_{15}, f_{17})$			
	$\textsc{Szor}_M(X, f_{17}, f_{18})$			
	$\textsc{Add}(X, B, f_{18}, f_{12})$			
	$\textsc{NEgyenlő}_0(X, f_3, f_{19}, f_{20})$			
	$\textsc{Oszt}_M(X, B, f_{19}, f_{21})$			
$f_{21}:$	$E \to E$	$g_1, \ldots, g_{M-1}$		
	$\textsc{Egyenlő}_i(B, g_i, g_i^+,\ )$			$(1 \le i \le M-1)$
$g_i^+:$	$E \to E\,\mathrm{kod}^{-1}(i)$	f_3		$(1 \le i \le M-1)$
$f_{20}:$	$E \to \varepsilon$	exit		

Tehát a dekódoló alprogram valamely S-ből levezethető G-beli α mondatformára a megfelelő $X^{\mathrm{kod}(\alpha)}E$ mondatformából $E\alpha$-t készít, (a többi változó már korábban kinullázódott), lab(f_{20}) pedig eltünteti E-t. Tehát $L^{\mathrm{ac}}(G') = L(G)$. □

3. Mátrixnyelvtanok

Míg programozott nyelvtanoknál a vezérlési struktúrára nincsen semilyen megkötés, addig a mátrixnyelvtanoknál teljes szekvenciákat kell végrehajtani. Egy szekvenciát az elejéről kell kezdeni és végig kell csinálni, ha egy szabályt nem lehet végrehajtani, akkor a program abortál.

A mátrixnyelvtanok programsémája, ha $m_i = [p_1^i \to q_1^i, \dots, p_{\ell(i)}^i \to q_{\ell(i)}^i]$ $(i \in \{1, \dots, k\})$, és $\ell(i)$ az i. mátrix hossza.



A mátrixnyelvtanokban megengedett még az egy szabályra vonatkozó elágazás, melyet a szabály pontozásával jelölünk. A pontozott szabály végrehajtási szemantikája: $\alpha \xrightarrow{p \overset{\bullet}{\to} q} \beta \iff \alpha \xrightarrow{p \to q} \beta \vee (p \nsubseteq \alpha \wedge \alpha = \beta)$.

3.1. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \mathcal{M}, S\rangle$ négyest mátrixnyelvtannak nevezünk, ha $\mathcal{M}$ mátrixok egy véges halmaza. Egy $m \in \mathcal{M}$ mátrix közönséges vagy pontozott szabályok véges sorozata. Legyen $m_i = [p_1^i \overset{(\bullet)}{\to} q_1^i, \dots p_{\ell(i)}^i \overset{(\bullet)}{\to} q_{\ell(i)}^i]$ $(i \in \{1, \dots, |\mathcal{M}|\})$. Az α mondatformából közvetlenül levezethető a β mondatforma (előfordulásellenőrzés nélkül) ha létezik $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell(i)} \in (T \cup N)^*$, hogy $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{\ell(i)} = \beta$ és minden $j \in \{1, \dots, \ell(i)\}$-re $\alpha_{j-1} \xrightarrow{p_j^i \to q_j^i} \alpha_j$ (a szabályok pontozását figyelmen kívül hagyjuk). Jelölése $\alpha \underset{G}{\overset{m_i}{\to}} \beta$.*

Az α mondatformából közvetlenül, előfordulásellenőrzéssel levezethető a β mondatforma ha létezik $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell(i)} \in (T \cup N)^*$, hogy $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{\ell(i)} = \beta$ és minden $j \in \{1, \dots, \ell(i)\}$-re $\alpha_{j-1} \xrightarrow{p_j^i \to q_j^i} \alpha_j$ ha a szabály pontozatlen, illetve $\alpha_{j-1} \xrightarrow{p_j^i \overset{\bullet}{\to} q_j^i} \alpha_j$, ha pontozott. Jelölése $\alpha \xrightarrow[G,\mathrm{ac}]{m_i} \beta$.

$\alpha \underset{G(,\mathrm{ac})}{\longrightarrow} \beta$, *ha létezik* $m \in \mathcal{M}$, *hogy* $\alpha \underset{G(,ac)}{\xrightarrow{m_i}} \beta$. $\underset{G(,\mathrm{ac})}{\xrightarrow{*}}$ *a* $\underset{G(,ac)}{\longrightarrow}$ *reflexív, tranzitív lezártja.*
$L^{(\mathrm{ac})}(G) = \{u \in T^* \mid S \underset{G(,\mathrm{ac})}{\xrightarrow{*}} u\}$.

G i. típusú mátrixnyelvtan, ha minden szabály a legáltalánosabb értelemben vett i. típusú. A korlátozott ε-szabály értelmezése: $[S \to \varepsilon] \in \mathcal{M}$ és S nem fordulhat elő szabály jobboldalán.

$\mathcal{M}_i^{(\mathrm{ac})} = \{L \mid \exists\, G$ i. típusú mátrixnyelvtan, melyre $L^{(\mathrm{ac})}(G) = L\}$.

Példák: (csak a mátrixrendszert megadva)

1. $[S \to ABC], [A \to aA, B \to bB, C \to cC], [A \to a, B \to b, C \to c]$.

   $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

2. $[S \to VW], [V \to tV, W \to tW]_{t \in T}, [V \to \varepsilon, W \to \varepsilon]$.

   $L(G) = \{uu \mid u \in T^*\}$.

3. $[A \stackrel{\bullet}{\to} U, Y \stackrel{\bullet}{\to} U, S \to ZZ], [A \stackrel{\bullet}{\to} U, S \stackrel{\bullet}{\to} U, Z \to Y], [A \stackrel{\bullet}{\to} U, Z \stackrel{\bullet}{\to} U, Y \to S], [Z \stackrel{\bullet}{\to} U, Y \stackrel{\bullet}{\to} U, S \to A], [Z \stackrel{\bullet}{\to} U, Y \stackrel{\bullet}{\to} U, S \stackrel{\bullet}{\to} U, A \to a]$.

   $L^{\mathrm{ac}}(G) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4. $[S \to ABC], [A \to AA], [B \to BB], [C \to CC], [A \to a, B \to b, C \to c]$.

   $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

   Egy mátrixnyelvtan természetes módon tekinthető programozott nyelvtannak is, ha $\sigma(P)$ a mátrixban következő szabály címkéjét tartalmazza csak, ha P nem a mátrix utolsó szabálya, míg a mátrixok első szabályainak címkéit, ha P egy mátrix utolsó szabálya.

   A mátrixnyelvtannak megfelelő programozott nyelvtan által generált nyelv:

   $L = \{a^n b^n c^n \,\vee\, a^{n+1} b^n c^n \,\vee\, a^{n+1} b^{n+1} c^n \mid n \geq 1\}$.

   A generált nyelvek különbözősége onnan adódik, hogy a programozott nyelvtanban a generálás bármelyik címkén befejeződhet.

3.2. tétel. $\mathcal{M}_i^{(\mathrm{ac})} = \mathcal{P}_i^{(\mathrm{ac})}$.

Bizonyítás. Legyen $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S, F, \mathrm{lab}, \sigma, \varphi \rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) programozott nyelvtan. Készítünk egy $G' = \langle T, N', \mathcal{M}, S' \rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) mátrixnyelvtant, melyre $L^{(\mathrm{ac})}(G') = L^{(\mathrm{ac})}(G)$.

Legyen $N' = N \cup \{A_f\}_{A \in N, f \in F} \cup \{S', U\}$, $\mathcal{M}$ mátrixai:

$$\begin{array}{ll}
[S' \to S_f] & (f \in F), \\
[A_f \to A,\, p \to q,\, B \to B_g] & (A, B \in N,\, f \in F,\, \mathrm{lab}(f) = p \to q,\, g \in \sigma(f)), \\
[A_f \to A,\, p \overset{\bullet}{\to} U^{\ell(p)},\, B \to B_g] & (A, B \in N,\, f \in F,\, \mathrm{bo}(\mathrm{lab}(f)) = p,\, g \in \varphi(f)), \\
[A_f \to A,\, p \to q] & (A \in N,\, f \in F,\, \mathrm{lab}(f) = p \to q,\, q \in T^*).
\end{array}$$

Tehát a következő programsor címkéjét az aktuális mondatforma egy tetszőlegesen választott nyelvtani jelének indexében tároljuk, azaz egy G-beli

$$[S, f] \underset{G}{\to} [\alpha_1, f_1] \underset{G}{\to} \cdots \underset{G}{\to} [\alpha_k, f_k] \underset{G}{\to} [u, g]$$

levezetésnek megfelel egy G'-beli

$$S \underset{G'}{\to} S_f \xrightarrow[G']{m_1} \widehat{\alpha}_1 \xrightarrow[G']{m_2} \cdots \xrightarrow[G']{m_k} \widehat{\alpha}_k \xrightarrow[G']{m'} u$$

levezetés, ahol minden $1 \le j \le k$-ra $\widehat{\alpha}_j$ α_j-nek egy olyan variánsa, ahol pontosan egy nyelvtani jel indexelt, és ez az index f_j, az m' 4. fajtájú mátrixszal történő levezetésnél eltűnik az index.

Mivel terminális szavaknak az összes G'-beli levezetése fenti alakú, ezért $L^{(\mathrm{ac})}(G') = L^{(\mathrm{ac})}(G)$.

Ha $S \to \varepsilon \in \mathcal{P}$, és a korlátozott ε-szabály teljesül, akkor hagyjuk el ezt a szabályt $\mathcal{P}$-ből G' elkészítése előtt, majd adjuk hozzá $\mathcal{M}$-hez az $[S' \to \varepsilon]$ mátrixot. Így a G' mátrixnyelvtan is teljesíti a korlátozott ε-szabályt és továbbra is $L^{(\mathrm{ac})}(G') = L^{(\mathrm{ac})}(G)$. Ezen módosítással ha G i. típusú (előfordulásellenőrzéses) programozott nyelvtan volt, akkor G' i. típusú (előfordulásellenőrzéses) mátrixnyelvtan.

Legyen most $G' = \langle T, N, \mathcal{M}, S\rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) mátrixnyelvtan. Készítünk egy $G' = \langle T, N', \mathcal{P}, S', F, \mathrm{lab}, \sigma, \varphi\rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) programozott nyelvtant, melyre $L^{(\mathrm{ac})}(G') = L^{(\mathrm{ac})}(G)$.

Legyen $\mathcal{M} = \{m_1 \ldots, m_{|\mathcal{M}|}\}$ és $m_{j,k}$ az m_j mátrix k. szabálya. Legyen továbbá $\mathcal{P}^\circ = \{m_{j,k} \,|\, 1 \le j \le |\mathcal{M}|, 1 \le k \le |m_j|, m_{j,k} \text{ pontozatlan}\}$, illetve $\mathcal{P}^\bullet = \{m_{j,k} \,|\, 1 \le j \le |\mathcal{M}|, 1 \le k \le |m_j|, m_{j,k} \text{ pontozott}\}$. Legyen $N' = N \cup \{X_t\}_{t \in T} \cup \{S', X_\varepsilon\}$. Ha valamely $1 \le j \le |\mathcal{M}|$, $1 \le k < |m_j|$ esetén $\mathrm{jo}(m_{j,k}) = t_1 \cdots t_\ell \in T^*$ vezessük be a következő jelöléseket. $x_{j,k} = \begin{cases} t_\ell & \ell > 0 \\ \varepsilon & \ell = 0 \end{cases}$, továbbá $X_{j,k} = \begin{cases} X_{t_\ell} & \ell > 0 \\ X_\varepsilon & \ell = 0 \end{cases}$ valamint $\widehat{m}_{j,k}$ az a szabály, melyre $\mathrm{bo}(\widehat{m}_{j,k}) = \mathrm{bo}(m_{j,k})$ és $\mathrm{jo}(\widehat{m}_{j,k}) = \begin{cases} t_1 \cdots t_{\ell-1} X_{t_\ell} & \ell > 0 \\ X_\varepsilon & \ell = 0 \end{cases}$.

A G' (előfordulásellenőrzéses) programozott nyelvtan $\mathcal{P}$ szabályrendszere a címkézéssel (F az előforduló címkék halmaza) valamint a pozitív (σ) és negatív (φ) rákövetkezési függvénnyel a következő:

		σ	φ	
$f_{\text{kezd}}:$	$S' \to S$	$\{f_{\ell,1}\}_{\ell=1}^{\lvert\mathcal{M}\rvert}$		
$f_{j,\lvert m_j\rvert}:$	$m_{j,\lvert m_j\rvert}$	$\{f_{\ell,1}\}_{\ell=1}^{\lvert\mathcal{M}\rvert}$	$\{f_{\ell,1}\}_{\ell=1}^{\lvert\mathcal{M}\rvert}$	$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert$, $m_{j,\lvert m_j\rvert} \in \mathcal{P}^\bullet$
$f_{j,\lvert m_j\rvert}:$	$m_{j,\lvert m_j\rvert}$	$\{f_{\ell,1}\}_{\ell=1}^{\lvert\mathcal{M}\rvert}$		$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert$, $m_{j,\lvert m_j\rvert} \in \mathcal{P}^\circ$
$f_{j,k}:$	$m_{j,k}$	$f_{j,k+1}$	$f_{j,k+1}$	$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert \wedge 1 \le k < \lvert m_j\rvert \wedge m_{j,k} \in \mathcal{P}^\bullet \wedge$ $(\text{jo}(m_{j,k}) \notin T^* \vee \forall k < \ell \le \lvert m_j\rvert\ m_{j,\ell} \in \mathcal{P}^\bullet)$
$f_{j,k}:$	$m_{j,k}$	$f_{j,k+1}$		$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert \wedge 1 \le k < \lvert m_j\rvert \wedge m_{j,k} \in \mathcal{P}^\circ \wedge$ $(\text{jo}(m_{j,k}) \notin T^* \vee \forall k < \ell \le \lvert m_j\rvert\ m_{j,\ell} \in \mathcal{P}^\bullet)$
$f_{j,k}:$	$\widehat{m}_{j,k}$	$\{f_{j,k}^A\}_{A\in N}$	$f_{j,k+1}$	$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert \wedge 1 \le k < \lvert m_j\rvert \wedge m_{j,k} \in \mathcal{P}^\bullet \wedge$ $\text{jo}(m_{j,k}) \in T^* \wedge \exists k < \ell \le \lvert m_j\rvert\ m_{j,\ell} \in \mathcal{P}^\circ$
$f_{j,k}:$	$\widehat{m}_{j,k}$	$\{f_{j,k}^A\}_{A\in N}$		$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert \wedge 1 \le k < \lvert m_j\rvert \wedge m_{j,k} \in \mathcal{P}^\circ \wedge$ $\text{jo}(m_{j,k}) \in T^* \wedge \exists k < \ell \le \lvert m_j\rvert\ m_{j,\ell} \in \mathcal{P}^\circ$
$f_{j,k}^A:$	$A \to A$	$f_{j,k}^{\text{vissza}}$		$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert \wedge 1 \le k < \lvert m_j\rvert \wedge A \in N \wedge$ $\text{jo}(m_{j,k}) \in T^* \wedge \exists k < \ell \le \lvert m_j\rvert\ m_{j,\ell} \in \mathcal{P}^\circ$
$f_{j,k}^{\text{vissza}}:$	$X_{j,k} \to x_{j,k}$	$f_{j,k+1}$		$1 \le j \le \lvert\mathcal{M}\rvert \wedge 1 \le k < \lvert m_j\rvert \wedge$ $\text{jo}(m_{j,k}) \in T^* \wedge \exists k < \ell \le \lvert m_j\rvert\ m_{j,\ell} \in \mathcal{P}^\circ$.

Tehát G' szabályai alapvetően az $\mathcal{M}$ mátrix szabályai, egy szabály esetén a rákövetkezési függvény a mátrix következő szabályára mutat, kivéve ha ez a mátrix utolsó szabálya, ekkor bármely mátrix első szabálya lehet a következő alkalmazott szabály. Amennyiben egy mátrix nem utolsó szabályának jobboldala terminális szó és van még a mátrix hátralevő szabályai között pontozatlan, akkor ezen szabály alkalmazása után nem érhet véget a levezetés, tehát ellenőriznünk kell, hogy van-e még az aktuális mondatformában nyelvtani jel. Az utolsó 4 sorban szereplő programozott szabályok ezt az ellenőrzést hajtják végre. Tehát a G' programozott nyelvtan valóban szimulálja a G mátrixnyelvtant, azaz $L^{(\text{ac})}(G') = L^{(\text{ac})}(G)$.

Ha $[S \to \varepsilon] \in \mathcal{M}$ és S nem fordul elő szabály jobboldalán, akkor G' elkészítése előtt töröljük ezt a mátrixot $\mathcal{M}$-ből, viszont adjuk hozzá $\mathcal{P}$-hez az $S' \to \varepsilon$ szabályt, melynek címkéje legyen f_{kezd0}, továbbá $\sigma(f_{\text{kezd0}}) = \{\text{exit}\}$ és $\varphi(f_{\text{kezd0}}) = \emptyset$. Ezzel a megjegyzéssel, ha G i. típusú, akkor G' is az. $\square$

4. Kontrollnyelvtanok

4.1. definíció. *Egy* $G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, \mathrm{lab}, C\rangle$ *hatost kontrollnyelvtannak nevezünk, ha a következők teljesülnek. Valamely* $S \in N$*-re* $\langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle$ *egy nyelvtan, ekkor* T*-t,* N*-t,* $\mathcal{P}$*-t és* S*-t rendre a kontrollnyelvtan ábécéjének, a nyelvtani jelek ábécéjének, szabályhalmazának illetve kezdőszimbólumának nevezzük.* $\mathcal{P}$ *tartalmazhat pontozott szabályokat is.* F *egy véges halmaz, a címkék halmaza.* $\mathrm{lab} : F \to \mathcal{P}$ *mindenütt értelmezett címkéző függvény. Továbbá* $C \subseteq F^*$ *reguláris nyelv, melyet kontrollnyelvnek nevezünk.*

4.2. definíció. *Az* α *mondatformából a kontrollnyelvtanban előfordulásellenőrzés nélkül közvetlenül levezethető a* β *mondatforma* ($\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$)*, ha létezik olyan* $f \in F$*, melyre* $\alpha \xrightarrow[G']{\mathrm{lab}(f)} \beta$*, a szabályok pontozásának figyelmen kívül hagyásával, ahol* $G' = \langle T, N, \mathcal{P}\rangle$*. Jelölése* $\alpha \xrightarrow[G]{f} \beta$*.*

Az α *mondatformából a kontrollnyelvtanban előfordulásellenőrzéssel közvetlenül levezethető a* β *mondatforma* ($\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$)*, ha létezik olyan* $f \in F$*, melyre* $\alpha \xrightarrow[G']{\mathrm{lab}(f)} \beta$*, a szabályok pontozásának figyelembevételével. Jelölése* $\alpha \xrightarrow[G,\mathrm{ac}]{f} \beta$*.*

4.3. definíció. *Az* α *mondatformából a kontrollnyelvtanban előfordulásellenőrzés nélkül illetve előfordulásellenőrzéssel közvetetten levezethető a* β *mondatforma* ($\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$) *a* $\sigma = f_1 \cdots f_k$ ($k \geq 0$) *kontrollszó segítségével, ha léteznek* $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ *mondatformák, melyekre* $\alpha_0 = \alpha, \alpha_k = \beta$ *és* $\alpha_{i-1} \xrightarrow[G(,\mathrm{ac})]{f_i} \alpha_i$ ($i \in \{1 \ldots, k\}$)*. Jelölése* $\alpha \xrightarrow[G(,\mathrm{ac})]{\sigma} \beta$*.*

4.4. definíció. *A kontrollnyelvtan által előfordulásellenőrzés nélkül illetve előfordulásellenőrzéssel generált nyelv:*

$$L^{(\mathrm{ac})}(G) = \{u \in T^* \mid \exists\, \sigma \in C,\ S \xrightarrow[G(,\mathrm{ac})]{\sigma} u\}.$$

Példák:

1. A G_1 kontrollnyelvtan címkézett szabályai:

$$\begin{array}{llll} f_1: & S \longrightarrow ABC & f_5: & A \longrightarrow a \\ f_2: & A \longrightarrow aA & f_6: & B \longrightarrow b \\ f_3: & B \longrightarrow bB & f_7: & C \longrightarrow c \\ f_4: & C \longrightarrow cC. & & \end{array}$$

$C = f_1(f_2f_3f_4)^*f_5f_6f_7$. Ekkor $L(G) = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$.

2. A G_2 kontrollnyelvtan címkézett szabályai:

$$\begin{array}{llll} f_1: & S \longrightarrow ZZ & f_2' & Z \stackrel{\bullet}{\longrightarrow} U \\ f_1': & S \stackrel{\bullet}{\longrightarrow} U & f_3 & S \longrightarrow a \\ f_2': & Z \longrightarrow S & & \end{array}$$

$C = (f_1^*f_1'f_2^*f_2')^*f_3^*$. Ekkor $L^{\text{ac}}(G) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, \text{lab}, C\rangle$ i. típusú kontrollnyelvtan ha $\langle T, N, \mathcal{P}\rangle$ i. típusú nyelvtan.
$\mathcal{C}_i^{(\text{ac})} = \{L \mid \exists G \; i.$ típusú kontrollnyelvtan, melyre $L^{(\text{ac})}(G) = L\}$.

Megjegyzés: A kontrollnyelv típusára tett megszorítást az indokolja, hogy minden nyelv nagyon egyszerűen generálható kontrollnyelvtannal, ha a kontrollnyelv bármilyen nyelv lehet. Legyenek ugyanis a címkézett szabályok

$$\begin{array}{lll} f_t: & S \to tS & (t \in T) \\ \#: & S \to \varepsilon. & \end{array}$$

Jelölés: $f_{t_1\cdots t_k} = f_{t_1}\cdots f_{t_k}$, továbbá legyen $f_L = \{f_u \mid u \in L\}$. Ekkor $C = f_L\#$ jó kontrollnyelv L-hez a fenti címkézett nyelvtanban.

4.5. tétel. $\mathcal{C}_i^{(\text{ac})} = \mathcal{M}_i^{(\text{ac})}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Bizonyítás. ($\supseteq$) Legyen $G = \langle T, N, \mathcal{M}, S\rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) mátrixnyelvtan és legyen $\mathcal{M}$ j. mátrixának k. szabálya $m_{j,k}$. A következő $G' = \langle T, N, F, \mathcal{P}, \text{lab}, C\rangle$ kontrollnyelvtan $L(G)$-t generálja, ahol $F = \{f_{j,k} \mid 1 \leq j \leq |\mathcal{M}|, 1 \leq k \leq |m_j|\}$, $\text{lab}(f_{j,k}) = m_{j,k}$ és $C = (\{f_{j,1}\cdots f_{j,|m_j|}\}_{j=1}^{|\mathcal{M}|})^*$.

($\subseteq$) Legyen $G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, \text{lab}, C\rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) kontrollnyelvtan. Készítünk egy $G' = \langle T, N', \mathcal{M}, S'\rangle$ i. típusú (előfordulásellenőrzéses) mátrixnyelvtant, melyre $L^{(\text{ac})}(G') = L^{(\text{ac})}(G)$.

Mivel C 3. típusú, ezért létezik olyan $\mathcal{A} = \langle Q, F, \delta, q_0, V\rangle$ véges determinisztikus automata, melyre $L(\mathcal{A}) = C$.

Legyen $N' = N \cup \{A_q\}_{A\in N, q\in Q}$. $\mathcal{M} = \{m_0\} \cup \{m_{A,B,f,q}\}_{A,B\in N, f\in F, q\in Q} \cup \{m_{A,f,q}\}_{A\in N, f\in F, q\in Q}$, ahol

$$\begin{array}{lll} m_0\colon & [S' \to S_{q_0}] & \\ m_{A,B,f,q}\colon & [A_q \to A,\ \mathrm{lab}(f),\ B \to B_{\delta(q,f)}] & (\mathrm{jo}(\mathrm{lab}(f)) \notin T^*) \\ m_{A,f,q}\colon & [A_q \to A,\ \mathrm{lab}(f)] & (\mathrm{jo}(\mathrm{lab}(f)) \in T^*, \delta(q,f) \in \widehat{V}), \end{array}$$

ahol az előfordulásellenőrzés nélküli esetben $\widehat{V} = V$, míg az előfordulásellenőrzéses esetben $\widehat{V} = \{q \in Q \mid \delta(q,\sigma) \in V,$ valamely σ csupa pontozott szabályok címkéiből álló sorozatra$\}$ (itt δ valójában a δ függvény szokásos kiterjesztése szavakra).

$u \in L^{(\mathrm{ac})}(G) \iff \exists\, \sigma \in C,\ S \xrightarrow[G(,\mathrm{ac})]{\sigma} u \iff \exists\, \sigma \in F^*, \delta(q_0,\sigma) \in V,\ S \xrightarrow[G(,\mathrm{ac})]{\sigma} u.$

A $\delta(q_0,\sigma) \in V$ feltétel ellenőrzése a mátrixnyelvtanban úgy történik, hogy az automata aktuális állapotát az aktuális mondatforma egy tetszőlegesen választott nyelvtani jelének indexében tároljuk, azaz egy G-beli

$$S \overset{f_1}{\underset{G}{\to}} \alpha_1 \overset{f_2}{\underset{G}{\to}} \cdots \overset{f_k}{\underset{G}{\to}} \alpha_k = u$$

levezetésnek megfelel egy G'-beli

$$S \underset{G'}{\to} S_{q_0} \xrightarrow[G']{m_1} \widehat{\alpha}_1 \xrightarrow[G']{m_2} \cdots \xrightarrow[G']{m_\ell} \widehat{\alpha}_\ell = u$$

levezetés, ahol az előfordulásellenőrzés nélküli esetben $\ell = k$, míg az előfordulásellenőrzéses esetben $\ell \le k$ és $\alpha_\ell = \cdots = \alpha_k$, $f_{\ell+1}, \ldots, f_k$ pontozott szabályok címkéi továbbá mindkét esetben minden $1 \le i \le \ell - 1$-re $\widehat{\alpha}_i$ α_i-nek egy olyan variánsa, ahol pontosan egy nyelvtani jel indexelt, és ez az index $\delta(q_0, f_1 \cdots f_i)$.

Mivel α_ℓ nem tartalmaz nyelvtani jelet, ezért m_ℓ egy 3. fajtájú mátrix, így $\delta(\delta(q_0, f_1 \cdots f_{\ell-1}), f_\ell) \in \widehat{V}$, mely az előfordulásellenőrzéses esetben is azzal ekvivalens, hogy $\delta(q_0, f_1 \cdots f_k) \in V$.

Mivel terminális szavaknak az összes G'-beli levezetése fenti alakú, ezért $L^{(\mathrm{ac})}(G') = L^{(\mathrm{ac})}(G)$.

A bizonyítás mindkét részében G' ugyanolyan típusú, mint G. $\square$

5. Indexelt nyelvtanok

Motiváció: Tekintsük a kifejezések fogalmának BNF-fel való leírását.

$\langle\text{Kifejezés}\rangle \to \langle\text{Tag}\rangle\langle\text{Addop}\rangle\langle\text{Kifejezés}\rangle \mid \langle\text{Tag}\rangle$
$\langle\text{Tag}\rangle \to \langle\text{Elem}\rangle\langle\text{Mpop}\rangle\langle\text{Elem}\rangle \mid \langle\text{Elem}\rangle$
$\langle\text{Elem}\rangle \to \langle\text{Azonosító}\rangle \mid \langle\text{Konstans}\rangle \mid (\langle\text{Kifejezés}\rangle)$.

Azonban például az $\langle\text{Utasítás}\rangle \to \text{IF}\langle\text{Kifejezés}\rangle\text{THEN}\langle\text{Utasítás}\rangle$ szabályban nem írhatunk akármilyen kifejezést $\langle\text{Kifejezés}\rangle$ helyére, csak logikai kifejezést. Hasonlóan egy számlálós ciklus paraméterei csak egész kifejezések lehetnek. Egy lehetőség ennek megoldására, hogy adott típusú kifejezéseket definiálunk.

$\langle\text{LogikaiKifejezés}\rangle \to \langle\text{LogikaiKifejezés}\rangle\langle\text{LogikaiAddop}\rangle\langle\text{LogikaiKifejezés}\rangle \mid$
$\quad\langle\text{LogikaiTag}\rangle$
$\langle\text{LogikaiTag}\rangle \to \langle\text{LogikaiElem}\rangle\langle\text{LogikaiMpop}\rangle\langle\text{LogikaiElem}\rangle \mid \langle\text{LogikaiElem}\rangle$
$\langle\text{LogikaiElem}\rangle \to \langle\text{LogikaiAzonosító}\rangle \mid \langle\text{LogikaiKonstans}\rangle \mid (\langle\text{LogikaiKifejezés}\rangle)$
$\langle\text{EgészKifejezés}\rangle \to \langle\text{EgészKifejezés}\rangle\langle\text{EgészAddop}\rangle\langle\text{EgészKifejezés}\rangle \mid \langle\text{EgészTag}\rangle$
$\langle\text{EgészTag}\rangle \to \langle\text{EgészElem}\rangle\langle\text{EgészMpop}\rangle\langle\text{EgészElem}\rangle \mid \langle\text{EgészElem}\rangle$
$\langle\text{EgészElem}\rangle \to \langle\text{EgészAzonosító}\rangle \mid \langle\text{EgészKonstans}\rangle \mid (\langle\text{EgészKifejezés}\rangle)$

Egy másik lehetőség a kifejezés fogalmának indexében jelölni a típust.

$\langle\text{Logikai if utasítás}\rangle \to \text{IF}\langle\text{Kifejezés}\rangle_L\text{THEN}\langle\text{Utasítás}\rangle$.

A tulajdonságok öröklődnek a fogalmakra, de a terminálisokra nem.

$\langle\text{Kifejezés}\rangle_L \to \langle\text{Tag}\rangle_L\langle\text{Addop}\rangle_L\langle\text{Kifejezés}\rangle_L \to \langle\text{Elem}\rangle_L\langle\text{Addop}\rangle_L\langle\text{Kifejezés}\rangle_L \to x\langle\text{Addop}\rangle_L\langle\text{Kifejezés}\rangle_L \to \dots$

Persze $\langle\text{Addop}\rangle \to + \mid - \mid \vee$ helyett most $\langle\text{Addop}\rangle_E \to + \mid -$, $\langle\text{Addop}\rangle_L \to \vee$ szerepel.

Általában fogalmak tulajdonságait jelölhetjük az indexben. Amennyiben a terminálisok, fogalmak és indexek halmaza páronként diszjunkt, akkor nem is kell az indexet indexbe tenni, egyszerűen a fogalmat jobbról konkatenáljuk az indexszel.

5.1. definíció. *Egy* $G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, S\rangle$ *ötöst indexelt nyelvtannak nevezünk, ha a következők teljesülnek.* T*,* N*,* F *páronként diszjunkt véges halmazok.* F *elemeit indexeknek nevezzük. Továbbá* $\langle T, N', \mathcal{P}, S\rangle$ *környezetfüggetlen nyelvtan, ahol* $N' = NF^*$*.*

5.2. definíció. *Legyen* $\alpha \in (T \cup NF^*)^*$*, azaz* $\alpha = u_0A_1\sigma_1u_1A_2\sigma_2 \cdots u_{n-1}A_n\sigma_nu_n$*, valamely* $n \in \mathbb{N}$*-re ahol* $u_i \in T^*$ $(0 \le i \le n)$*,* $A_i \in N$ $(1 \le i \le n)$*,* $\sigma_i \in F^*$ $(1 \le i \le n)$*.*

Az α *mondatformából* $\sigma \in F^*$ *teljes öröklődésével kapott mondatforma* $n = 0$ *esetén* α*, különben*

$$\alpha^{\leftarrow\sigma} := u_0A_1\sigma_1\sigma u_1A_2\sigma_2\sigma \cdots u_{n-1}A_n\sigma_n\sigma u_n.$$

Az α *mondatformából* $\sigma \in F^*$ *legbal öröklődésével kapott mondatforma* $n = 0$ *esetén* α*, különben*

$$\alpha^{\underset{\mathrm{lb}}{\leftarrow}\sigma} := u_0A_1\sigma_1\sigma u_1A_2\sigma_2 \cdots u_{n-1}A_n\sigma_nu_n.$$

A teljes illetve legbal öröklődés, mint művelet legyen alacsonyabb prioritású a konkatenációnál.

Példa: $Af^2aBfC^{\leftarrow gf} = Af^2gfaBfgfCgf$, míg $Af^2aBfC^{\underset{\mathrm{lb}}{\leftarrow}gf} = Af^2gfaBfC$.

5.3. definíció. α*-ból teljes öröklődéssel közvetlenül levezethető* β *mondatforma (* $\alpha, \beta \in (T \cup NF^*)^*$*), ha következőek teljesülnek.*

$\alpha \underset{G}{\rightarrow} \beta \iff \alpha = \alpha_1A\sigma\alpha_2$, $\beta = \alpha_1q^{\leftarrow\sigma}\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (T \cup NF^*)^*$, $A \rightarrow q \in \mathcal{P}$, $A \in NF^*$, $q \in (T \cup NF^*)^*$.

5.4. definíció. α*-ból legbal öröklődéssel közvetlenül levezethető* β *mondatforma (* $\alpha, \beta \in (T \cup NF^*)^*$*), ha következőek teljesülnek.*

$\alpha \underset{G,\mathrm{lb}}{\longrightarrow} \beta \iff \alpha = \alpha_1A\sigma\alpha_2$, $\beta = \alpha_1(q\alpha_2)^{\underset{\mathrm{lb}}{\leftarrow}\sigma}$, $\alpha_1 \in T^*$, $\alpha_2 \in (T \cup NF^*)^*$, $A \rightarrow q \in \mathcal{P}$, $A \in NF^*$, $q \in (T \cup NF^*)^*$.

Tehát a legbal öröklődéss levezetés egyben legbal levezetést is jelent. A $\overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}}, \overset{*}{\underset{G,\mathrm{lb}}{\longrightarrow}}$ közvetett levezetéseket a $\underset{G}{\rightarrow}, \underset{G,\mathrm{lb}}{\longrightarrow}$ közvetlen levezetések reflexív, tranzitív lezártjaként értelmezzük.

5.5. definíció. *A* $G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, S\rangle$ *indexelt nyelvtan által teljes öröklődéssel illetve legbal öröklődéssel generált nyelv* $L^{(\mathrm{lb})}(G) = \{u \in T^* \mid S \overset{*}{\underset{G,(\mathrm{lb})}{\longrightarrow}} u\}$*.*

Példák:

1. Legyen $G_1 = \langle\{a, b, c\}, \{S, S', A, B, C\}, \{f, g\}, \mathcal{P}_1, S\rangle$ a következő indexelt nyelvtan. $\mathcal{P}_1$ szabályai:

$$\begin{array}{llll}
S \longrightarrow S'g & S' \longrightarrow ABC & Bf \longrightarrow bB & Ag \longrightarrow \varepsilon \\
S' \longrightarrow S'f & Af \longrightarrow aA & Cf \longrightarrow cC & Bg \longrightarrow \varepsilon \\
 & & & Cg \longrightarrow \varepsilon
\end{array}$$

Egy teljes öröklődéses levezetés:

$S \to (S'g)^{\leftarrow\varepsilon} = S'g \to (S'f)^{\leftarrow g} = S'fg \to (S'f)^{\leftarrow fg} = S'ffg \to (ABC)^{\leftarrow ffg} = AffgBffgCffg \to Affg(bB)^{\leftarrow fg}Cffg = AffgbBfgCffg \xrightarrow{*} a^2b^2c^2$.

$L(G_1) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

2. $G_2 = \langle T, \{S, S', A\}, \{f_t\}_{t \in T}, \mathcal{P}_2, S\rangle$. $\mathcal{P}_2$ szabályai:

$$\begin{array}{lll}
S \longrightarrow S'g & S' \longrightarrow AA & Ag \longrightarrow \varepsilon \\
S' \longrightarrow S'f_t \quad (t \in T) & Af_t \longrightarrow tA &
\end{array}$$

$L(G_2) = \{uu \mid u \in T^*\}$.

3. $G_3 = \langle \{a\}, \{S, I, A\}, \{f, g\}, \mathcal{P}_3, S\rangle$. $\mathcal{P}_3$ szabályai:

$$\begin{array}{lll}
S \longrightarrow Ig & I \longrightarrow \varepsilon & Ag \longrightarrow \varepsilon \\
I \longrightarrow aAAIf & Af \longrightarrow aA &
\end{array}$$

$S \to Ig \xrightarrow{k} \alpha I f^k g$. Teljes indukcióval belátható, hogy $\ell_a(\alpha) + \ell_f(\alpha) = k^2$. $\ell_a(\varepsilon) + \ell_f(\varepsilon) = 0^2$ $\alpha I f^k g \to \alpha(aAAIf)^{\leftarrow f^k g} = \alpha a A f^k g A f^k g I f^{k+1} g$, melyre $\ell_a(\alpha) + \ell_f(\alpha) = k^2 + k + k + 1 = (k+1)^2$. Tehát $L(G_3) = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4. $G_4 = \langle \{a\}, \{S, I, B, D, E, V\}, \{f, g\}, \mathcal{P}_4, S\rangle$. $\mathcal{P}_4$ szabályai:

$$\begin{array}{lll}
S \longrightarrow Ifg & Df \longrightarrow DBff & Vg \longrightarrow \varepsilon \\
I \longrightarrow DI & Dg \longrightarrow Eg & E \longrightarrow \varepsilon \\
I \longrightarrow V & Vf \longrightarrow aV & B \longrightarrow \varepsilon
\end{array}$$

Egy legbal öröklődéses levezetés:

$S \to (Ifg)^{\overset{\leftarrow}{\mathrm{lb}}\varepsilon} = Ifg \to (DI)^{\overset{\leftarrow}{\mathrm{lb}}fg} = DfgI \to (DBffI)^{\overset{\leftarrow}{\mathrm{lb}}g} = DgBffI \to (EgBffI)^{\overset{\leftarrow}{\mathrm{lb}}\varepsilon} = EgBffI \to (BffI)^{\overset{\leftarrow}{\mathrm{lb}}g} = BffgI \to (I)^{\overset{\leftarrow}{\mathrm{lb}}ffg} = If^2g$.

$If^2g \xrightarrow{*} If^4g \xrightarrow{*} \cdots \xrightarrow{*} If^{2^k}g \to Vf^{2^k}g \to a^{2^k}$. $L^{\mathrm{lb}}(G_4) = \{a^{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

$\mathcal{L}_{\text{Ind}}^{(\text{lb})} = \{L \,|\, \exists G\,\text{indexelt nyelvtan, melyre } L^{(\text{lb})}(G) = L\}.$

5.6. tétel. $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{\text{Ind}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{Ind}}^{\text{lb}} = \mathcal{L}_0$.

Bizonyítás. Mivel 2. típusú nyelvtanokban $S \xrightarrow[G]{*} u \Leftrightarrow S \xrightarrow[G,\text{lb}]{*} u$ és minden nyelvtan tekinthető indexelt nyelvtannak az $F = \emptyset$ választással, ezért $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{\text{Ind}}$ és $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{\text{Ind}}^{\text{lb}}$, a valódi tartalmazást a fenti példák mutatják.

Legyen tehát $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle \in \mathcal{G}_0$ nyelvtan, készítünk $G' = \langle T, N', F, \mathcal{P}', S'\rangle$ indexelt nyelvtant, melyre $L^{\text{lb}}(G') = L(G)$. Legyen $N' = \{S', B, E, I, L, V\}$ és $F = \{f_Z\}_{Z \in T \cup N} \cup \{g\}$. Ha $Z_1 Z_2 \cdots Z_k \in (T \cup N)^*$, akkor vezessük be a következő jelölést: $f_{Z_1 Z_2 \cdots Z_k} := f_{Z_1} f_{Z_2} \cdots f_{Z_k}$. A $\mathcal{P}'$ szabályrendszer:

$$\begin{array}{llll}
S' \to I f_S g & & E \to \varepsilon & \\
I \to LI \,|\, V & & B \to \varepsilon & \\
L f_Z \to L B f_Z & (Z \in T \cup N) & V f_t \to t V & (t \in T) \\
L f_p \to E f_q & (p \to q \in \mathcal{P}) & V g \to \varepsilon. &
\end{array}$$

Elegendő belátni, hogy $S' \xrightarrow[G',\text{lb}]{*} I f_\alpha g \iff S \xrightarrow[G]{*} \alpha$, hiszen az $I \to V$ szabály alkalmazása után visszakaphatjuk az I indexében tárolt mondatformát, ha az terminális sorozat. Egy $\alpha = \alpha_1 p \alpha_2 \to \alpha_1 q \alpha_2 = \beta$ G-beli lépés szimulálása G'-ben öt lépésben történik. Az első lépésben az $I f_\alpha g$ mondatformából $L f_\alpha g I$ lesz az $I \to LI$ szabály alkalmazásával. Mivel így most L lett a legbal nyelvtani jel, ezért most csak arra (vagy indexelt változatára) tudunk szabályt alkalmazni. Második lépésben az $L f_Z \to L B f_Z$ szabályok k-szori alkalmazásával (akár $k = 0$ is lehet) leválasztunk α-ból balról egy α_1 részt, és ez bekerül az egymás utáni B-k indexébe fordított sorrendben, a kapott mondatforma $L f_{\alpha'} g B f_{Z_k} \cdots B f_{Z_1} I$, ahol $\alpha = \alpha_1 \alpha' = Z_1 \cdots Z_k \alpha'$. A harmadik lépésben akkor tudunk továbblépni, ha α'-nek prefixe valamely G-beli szabály baloldala, legyen ez a szabály $p \to q$, azaz $\alpha' = p \alpha_2$. Ekkor az $L f_p \to E f_q$ szabály alkalmazásával legbal öröklődéssel kapott mondatforma $(E f_q)^{\overleftarrow{f_{\alpha_2} g}}_{\text{lb}} B f_{Z_k} \cdots B f_{Z_1} I = E f_{q \alpha_2} g B f_{Z_k} \cdots B f_{Z_1} I$. A negyedik és ötödik lépésben az $E \to \varepsilon$ illetve $B \to \varepsilon$ szabályok alkalmazásával előbb $B f_{Z_k q \alpha_2} g \cdots B f_{Z_1} I$-t majd a B-ket sorra balról jobbra (a levezetésnek legbal levezetésnek kell lennie) eltüntetve végül megkapjuk $I f_{Z_1 \cdots Z_k q \alpha_2} g = I f_\beta g$-t (eltűnő nyelvtani jel indexe a megmaradó legbaloldalibb nyelvtani jelre öröklődik).

Legyen $G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, S\rangle$ indexelt nyelvtan, készítünk egy $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S'\rangle \in \mathcal{G}_0$ nyelvtant, melyre $L(G') = L(G)$. Jelölje M a $\mathcal{P}$-beli szabályok jobboldalán előforduló N-beli jelek maximumát. Legyen $N' = N \cup F \cup \{Z_i\}_{0 \le i \le M} \cup \{X_{f,i}\}_{f \in F, 0 \le i \le M} \cup \{S', R\}$. $\mathcal{P}'$ szabályai a következők:

$$\begin{array}{ll}
S' \to SR & \\
A \to qZ_j & (A \to q \in \mathcal{P},\ j \text{ a } q\text{-ban levő } N\text{-beli jelek száma}) \\
Z_j f \to X_{f,j-1} \cdots X_{f,1} X_{f,0} Z_j & (f \in F,\ 0 \leq j \leq M) \\
tX_{f,i} \to X_{f,i} t & (t \in T,\ f \in F,\ 0 \leq i \leq M) \\
gX_{f,i} \to X_{f,i} g & (f, g \in F,\ 1 \leq i \leq M) \\
YX_{f,i} \to X_{f,i-1} Y & (Y \in N,\ f \in F,\ 1 \leq i \leq M) \\
gX_{f,0} \to gf & (f, g \in F) \\
YX_{f,0} \to Yf & (Y \in N,\ f \in F) \\
Z_j t \to t & (t \in T,\ 0 \leq j \leq M) \\
Z_j Y \to Y & (Y \in N \cup \{R\},\ 0 \leq j \leq M) \\
R \to \varepsilon. &
\end{array}$$

Egy $\alpha_1 A\sigma\alpha_2 \underset{G}{\to} \alpha_1 q^{\leftarrow\sigma}\alpha_2$ levezetési lépést ($\alpha_1, \alpha_2, q \in (T \cup NF^*)^*, A \in N, F \in F^*$) egy $\alpha_1 A\sigma\alpha_2 R \overset{*}{\underset{G}{\to}} \alpha_1 q^{\leftarrow\sigma}\alpha_2 R$ levezetéssel szimulálunk a G' 0. típusú nyelvtanban.

Legyen $q = u_1 A_1 \sigma_1 \cdots u_j A_j \sigma_j u_{j+1}$, ahol $u_i \in T^*(i \leq j+1), A_i \in N, \sigma_i \in F^*(i \leq j)$ továbbá $\sigma = f\sigma'$, $(f \in F, \sigma, \sigma' \in F^*)$.

Ekkor G'-ben $\sigma = \varepsilon$ esetén $\alpha_1 A\sigma\alpha_2 R \to \alpha_1 qZ_j\alpha_2 R \to \alpha_1 q\alpha_2 R$. $\sigma \neq \varepsilon$ esetén:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A\sigma\alpha_2 R &\to \alpha_1 qZ_j\sigma\alpha_2 R \\
&\to \alpha_1 u_1 A_1 \sigma_1 \cdots u_j A_j \sigma_j u_{j+1} X_{f,j-1} \cdots X_{f,1} X_{f,0} Z_j \sigma' \alpha_2 R \\
&\overset{*}{\to} \alpha_1 u_1 A_1 \sigma_1 X_{f,0} \cdots u_j A_j \sigma_j X_{f,0} u_{j+1} Z_j \sigma' \alpha_2 R \\
&\overset{*}{\to} \alpha_1 u_1 A_1 \sigma_1 f \cdots u_j A_j \sigma_j f u_{j+1} Z_j \sigma' \alpha_2 R \\
&\overset{*}{\to} \alpha_1 u_1 A_1 \sigma_1 \sigma \cdots u_j A_j \sigma_j \sigma u_{j+1} Z_j \alpha_2 R \\
&\to \alpha_1 u_1 A_1 \sigma_1 \sigma \cdots u_j A_j \sigma_j \sigma u_{j+1} \alpha_2 R = \alpha_1 q^{\leftarrow\sigma}\alpha_2 R,
\end{aligned}$$

továbbá a Z_j, $X_{f,i}$ nyelvtani jeleket máshogy nem lehet eltüntetni, azaz G'-ben minden S'-ből való terminális szót eredményező levezetés G-beli levezetési lépések szimulációjának sorozata, tehát $L(G') = L(G)$.

Most készítünk a $G = \langle T, N, F, \mathcal{P}, S\rangle$ indexelt nyelvtanhoz G' módosításával egy $G'' = \langle T, N'', \mathcal{P}'', S'\rangle \in \mathcal{G}_0$ nyelvtant, melyre $L(G'') = L^{\mathrm{lb}}(G)$. Legyen $N'' = N' \cup \widehat{N} \cup \{X'_f, X''_f\}_{f \in F}$, ahol $\widehat{N} = \{\widehat{A}\}_{A \in N}$. Egy $q \in (T \cup NF^*)^*$ indexelt mondatforma esetén vezessük be az alábbi jelölést:

$$\widehat{q} = \begin{cases} u_1 \widehat{A}_1 \sigma_1 q' & \text{ha } q = u_1 A_1 \sigma_1 q' \quad (u_1 \in T^*, A_1 \in N, \sigma_1 \in F^*, q' \in (T \cup NF^*)^*) \\ q & \text{ha } q \in T^* \end{cases}.$$

$\mathcal{P}''$ szabályai:

$$
\begin{array}{ll}
S' \to \widehat{S}R & \\
\widehat{A} \to \widehat{q}Z_j & (A \to q \in \mathcal{P},\ j \text{ a } q\text{-ban levő } N\text{-beli jelek száma}) \\
Z_j f \to X_{f,j-1}Z_j & (f \in F,\, 1 \le j \le M) \\
tX_{f,i} \to X_{f,i}\, t & (t \in T,\ f \in F,\, 0 \le i \le M) \\
gX_{f,i} \to X_{f,i}\, g & (f, g \in F,\, 1 \le i \le M) \\
YX_{f,i} \to X_{f,i-1}Y & (Y \in N, f \in F,\, 1 \le i \le M) \\
gX_{f,0} \to gf & (f, g \in F) \\
\widehat{Y}X_{f,0} \to \widehat{Y}f & (\widehat{Y} \in \widehat{N},\ f \in F) \\
Z_j t \to t & (t \in T,\, 1 \le j \le M) \\
Z_j Y \to Y & (Y \in N \cup \{R\},\, 1 \le j \le M) \\
Z_0 Y \to \widehat{Y} & (Y \in N) \\
Z_0 R \to R & \\
Z_0 f \to Z_0 X'_f & (f \in F) \\
X'_f t \to tX'_f & (t \in T,\ f \in F) \\
X'_f g \to gX'_f & (f, g \in F) \\
X'_f Y \to YX''_f & (Y \in N,\ f \in F) \\
X'_f R \to R & (f \in F) \\
X''_f g \to gX''_f & (f, g \in F) \\
X''_f t \to ft & (t \in T,\ f \in F) \\
X''_f Y \to fY & (Y \in N \cup \{R\},\ f \in F) \\
R \to \varepsilon. &
\end{array}
$$

Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy $S' \xrightarrow[G']{*} u \iff S \xrightarrow[G,\mathrm{lb}]{*} u$.

$\square$

Megjegyzés: $\mathcal{L}_{\mathrm{Ind}} \overset{?}{\subset} \mathcal{L}^{\mathrm{lb}}_{\mathrm{Ind}}$, nem ismeretes.

6. Attribútumnyelvtanok

6.1. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$ négyest attribútumnyelvtannak nevezünk, ha a következők teljesülnek. N minden eleme egy rekord típus. A rekord mezőneveit attribútumoknak nevezzük és az $A \in N$ nyelvtani jelhez tartozó attribútumokat $\mathrm{Attr}(A)$-val jelöljük. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy egy $\mathrm{attr} \in \mathrm{Attr}(A)$ attribútum az A nyelvtani jelhez tartozik, akkor $A.\mathrm{attr}$-t írunk. A rekordmezőkhöz hozzá van rendelve egy értékhalmaz (domain), egy rekormező értékei a hozzárendelt értékhalmazból kerülhetnek ki. $\mathcal{P}$ nyelvtani szabályok véges halmaza. Minden szabály 2 részből áll, egy P 2. típusú nyelvtani szabályból és egy $\varphi(P)$ elsőrendű logikai állításból, melynek szabad változói az adott szabályban szereplő nyelvtani jelek attribútumai. Ha egy nyelvtani jel egy szabályban többször is szerepel, akkor ezeket az előfordulásokat a logikai állításban megkülönböztetetten kell kezelni.*

6.2. definíció. *t a $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$ attribútumnyelvtanhoz tartozó szemantikus fa, ha t a G-hez, mint közönséges nyelvtanhoz tartozó szintaxisfa és minden belső pontjához hozzárendeljük a benne levő nyelvtani jel, mint rekord típus egy lehetséges értékét.*

6.3. definíció. *t helyes szemantikus fa, ha minden c belső csúcs esetén a c-be és gyermekeibe írt értékek kielégítik $\varphi(P)$-t, ahol P a c-hez és gyermekeihez tartozó szintaktikus szabály.*

6.4. definíció. *A $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$ attribútumnyelvtan által generált nyelv*

$$L(G) = \{u \in T^* \mid \exists\, t \textit{ helyes szemantikus fa, melyre } \mathrm{gy}(t) = S, \mathrm{front}(t) = u\}.$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{Attr}} = \{L \mid \exists\, G \,\text{attribútumnyelvtan, melyre}\; L(G) = L\}$.

Példák: Egy szabályban egy adott nyelvtani jel különböző előfordulásaira a nyelvtani jel indexelésével hivatkozunk. Tehát az 1 index a szabályban balról jobbra első, 2 a második előfordulásra hivatkozik, és így tovább.

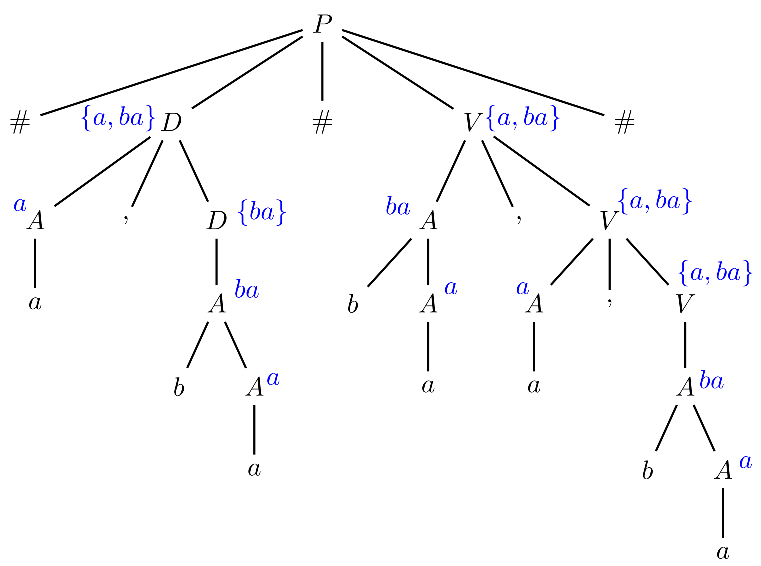
1. Programozási nyelvek szintaxisa nem írható le csupán 2. típusú nyelvtannal a deklaráció és a neki megfelelő azonosítóhasználat miatt, ugyanis $\{uu \mid u \in T^*\} \notin \mathcal{L}_2$. Vizsgáljuk meg, hogyan lehetne a deklarációkat leírni attribútumnyelvtanokkal. Egy

leegyszerűsített modellt vizsgálunk, ahol a deklarációs rész vesszővel elválasztott szavak sorozata, a végrehajtható rész is, azzal a különbséggel, hogy a végrehajtható rész minden eleme elő kell forduljon a deklarációs részben is. Az egyes részeket # jellel határoljuk. A modellt leíró G attribútumnyelvtan szabályai:

$P \to \#D\#V\#$	$D.\text{sztábla} = V.\text{sztábla}$
$D \to A$	$D.\text{sztábla} = \{A.\text{szó}\}$
$D \to A, D$	$D_1.\text{sztábla} = D_2.\text{sztábla} \cup \{A.\text{szó}\}$
$A \to a$	$A.\text{szó} = a \quad (a \in T)$
$A \to aA$	$A_1.\text{szó} = aA_2.\text{szó} \quad (a \in T)$
$V \to A$	$A.\text{szó} \in V.\text{sztábla}$
$V \to A, V$	$V_1.\text{sztábla} = V_2.\text{sztábla} \wedge A.\text{szó} \in V_1.\text{sztábla}$,

ahol az sztábla attribútum értékhalmaza 2^{T^*}, a szóé T^*.

Például $u = \#a, ba\#ba, a, ba\# \in L(G)$. Egy u-hoz tartozó helyes szemantikus fa a 6.1. ábrán látható.



6.1. ábra. Egy $\#a, ba\#ba, a, ba\#$-hoz tartozó helyes szemantikus fa a deklarációk attribútumnyelvtanában.

2. $G = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S\rangle$, ahol $\mathcal{P}$:

$S \to ABC$	$A.\text{szám} = B.\text{szám} = C.\text{szám}$
$A \to aA$	$A_1.\text{szám} = A_2.\text{szám} + 1$
$A \to a$	$A_1.\text{szám} = 1$
$B \to bB$	$B_1.\text{szám} = B_2.\text{szám} + 1$
$B \to b$	$B_1.\text{szám} = 1$
$C \to cC$	$C_1.\text{szám} = C_2.\text{szám} + 1$
$C \to c$	$C_1.\text{szám} = 1$

S-nek 0, A-nak, B-nek, C-nek 1 attribútuma van, mindhárom attribútumnév "szám".

$\text{dom}(A.\text{szám}) = \text{dom}(B.\text{szám}) = \text{dom}(C.\text{szám}) = \mathbb{N}$.

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

3. $G = \langle \{a\}, \{S, A, B\}, \mathcal{P}, S\rangle$, ahol $\mathcal{P}$:

$S \to AB$	$A.\text{szám} = (B.\text{szám})^2$
$A \to aA$	$A_1.\text{szám} = A_2.\text{szám} + 1$
$A \to \varepsilon$	$A.\text{szám} = 0$
$B \to B$	$B_1.\text{szám} = B_2.\text{szám} + 1$
$B \to \varepsilon$	$B.\text{szám} = 0$

$\text{dom}(A.\text{szám}) = \text{dom}(B.\text{szám}) = \mathbb{N}$.

$L(G) = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

6.5. tétel. $\mathcal{L}_{\text{Attr}} \supseteq \mathcal{L}_0$.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy tetszőleges $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle \in \mathcal{G}_0$ nyelvtanhoz létezik G' attribútumnyelvtan, melyre $L(G') = L(G)$. Legyen $\mathcal{P} = \{p_1 \to q_1, \ldots, p_n \to q_n\}$. Legyen a $G' = \langle T, \{S', A, B, C\} \cup \{X_Z\}_{Z \in T \cup N}, \mathcal{P}', S'\rangle$ nyelvtan minden nyelvtani jelének egyetlen szó attribútuma, melynek típusa $(T \cup N)^*$. A szabályok:

$S' \to CB$	$S'.\text{szó} = C.\text{szó} = B.\text{szó}$	
$C \to tC$	$C_1.\text{szó} = tC_2.\text{szó}$	$(t \in T)$
$C \to \varepsilon$	$C.\text{szó} = \varepsilon$	
$B \to AAAAAAB$	$B_1.\text{szó} = A_1.\text{szó}\, A_2.\text{szó}\, A_3.\text{szó} \wedge B_2.\text{szó} = A_4.\text{szó}\, A_5.\text{szó}\, A_6.\text{szó} \wedge$ $A_1.\text{szó} = A_4.\text{szó} \wedge A_3.\text{szó}\, A_6.\text{szó} \wedge (A_5.\text{szó} = p_1 \wedge A_2.\text{szó} = q_1 \vee$ $A_5.\text{szó} = p_2 \wedge A_2.\text{szó} = q_2 \vee \ldots \vee A_5.\text{szó} = p_n \wedge A_2.\text{szó} = q_n)$	
$A \to X_Z A$	$A_1.\text{szó} = ZA_2.\text{szó}$	$(Z \in T \cup N)$
$X_Z \to \varepsilon$	$X_Z.\text{szó} = Z$	$(Z \in T \cup N)$
$A \to \varepsilon$	$A.\text{szó} = \varepsilon.$	

A $B \to AAAAAAB$ alakú szabályok a G-beli levezetések szimulációját végzik, a mondatformának, mint B attribútumának alulról felfelé való szintézisével. Az $S' \to CB$ szabály azt garantálja, hogy a levezetett terminális szó valóban S-ből kiinduló G-beli levezetés eredménye. □

Megjegyzés: Ha minden domain véges, akkor konstruálható olyan 2. típusú nyelvtan, mely az attribútumnyelvtan által leírt nyelvet generálja, ilyenkor a nyelv 2. típusú. (Az új nyelvtani jelek az eredeti nyelvtani jelek minden lehetséges értékükkel címkézve, a szabályok pedig olyanok, hogy a bennük lévő nyelvtani jelek címkéi kielégítik az eredeti szabályhoz tartozó állítást.)

7. Kétszintű nyelvtanok

Az ALGOL 68 leírásához van Wijngaarden holland matematikus használt először kétszintű nyelvtanokat, melyeket róla elnevezve van Wijngaarden nyelvtanoknak vagy W-nyelvtanoknak is neveznek.

Motiváció: Tekintsük a lista fogalmának BNF-fel való leírását.

1. $\langle$egész lista$\rangle \to \langle$egész$\rangle \mid \langle$egész$\rangle, \langle$egész lista$\rangle$

   $\langle$valós lista$\rangle \to \langle$valós$\rangle \mid \langle$valós$\rangle, \langle$valós lista$\rangle$

   Tekintsük változónak azt, hogy milyen lista. Ekkor a lista fogalma következőképpen írható le a W-nyelvtanban.

   $\langle X \text{ lista}\rangle \to \langle X\rangle \mid \langle X\rangle, \langle X \text{ lista}\rangle$ hiperszabály

   $X \to$ egész | valós | duplapontos metaszabály

   A hiperszabályok adják meg a szabályok sémáját, míg a metaszabályok magukról a szabályokról szóló szabályok.

2. Adott hosszúságú listák esetén a hosszat unárisan számoljuk, pálcikák (**|**) segítségével.

   $\langle Y\,\mathbf{|}$ hosszú X lista$\rangle \to \langle X\rangle, \langle Y$ hosszú X lista$\rangle$ hiperszabály

   $\langle\mathbf{|}$ hosszú X lista$\rangle \to \langle X\rangle$ hiperszabály

   $X \to$ egész | valós | duplapontos metaszabály

   $Y \to \mathbf{|} \mid \mathbf{|}Y$ metaszabály

   A tényleges szabályokat példányosítással kapjuk. Például legyen X=egész és Y=**||**. A példányosítással kapott szabályok:

   $\langle$**|||** hosszú egész lista$\rangle \to \langle$egész$\rangle, \langle$**||** hosszú egész lista$\rangle$

   $\langle$**||** hosszú egész lista$\rangle \to \langle$egész$\rangle, \langle$**|** hosszú egész lista$\rangle$

   $\langle$**|** hosszú egész lista$\rangle \to \langle$egész$\rangle$

7.1. definíció. *$G = \langle G_1, G_2\rangle$ kétszintű nyelvtan (W-nyelvtan), ha*

- *$G_2 = \langle MT, MN, M\mathcal{P}\rangle$ metanyelvtan, 3. típusú kezdőjel nélküli nyelvtan.*
  MT elemeit metaterminálisoknak, MN elemeit metanyelvtani jeleknek, $M\mathcal{P}$ elemeit metaprodukciós szabályoknak nevezzük.

- *$G_1 = \langle T, HN, H\mathcal{P}, S\rangle$ hipernyelvtan.*
  $HN \subseteq (MT \cup MN)^*$ véges nyelv, $S \in (MT)^+$ kezdőjel. HN elemeit hipernyelvtani jeleknek, $H\mathcal{P}$ elemeit hiperprodukciós szabályoknak nevezzük. $H\mathcal{P}$ 2. típusú szabályok véges halmaza.

Konvencionálisan a terminálisokat és a metaterminálisokat kisbetűkkel, a metanyelvtani jeleket nagybetűvel jelöljük, a hipernyelvtani jeleket $\langle$ és $\rangle$ közé tesszük.

7.2. definíció. *Legyen $\langle G_1, G_2\rangle$ kétszintű nyelvtan, továbbá $L(G_2, Y) = \{\, \alpha \in (MT)^* \mid Y \xrightarrow[G_2]{*} \alpha\}$. Egy $h : (MT \cup MN)^* \to (MT)^*$ homomorfizmust példányosításnak nevezünk, ha minden $t \in MT$ esetén $h(t) = t$ valamint minden $Y \in MN$ esetén $h(Y) \in L(G_2, Y)$. A h homomorfizmus természetes módon kiterjeszthető $(MT \cup MN)^*$ részhalmazaira, így HN elemeire és így a $H\mathcal{P}$-beli hiperszabályokra is. Jelölje* Peld $=$ Peld(G) *a G nyelvtan összes példányosításainak halmazát. Definiálunk egy $\widehat{G}$ ∞ sok szabállyal rendelkező nyelvtant, $\widehat{G} = \langle T, \{h(HN)\}_{h\in \mathrm{Peld}}, \{h(H\mathcal{P})\}_{h\in \mathrm{Peld}}, S\rangle$. $L(\widehat{G}) = \{u \in T^* \mid S \xrightarrow[\widehat{G}]{*} u\}$. A G kétszintű nyelvtan által generált nyelv $L(G) = L(\widehat{G})$.*

$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} = \{L \mid \exists\, G$ kétszintű nyelvtan, melyre $L(G) = L\}$.

Példák:

1. Legyenek a $G^{(1)}$ W-nyelvtan hiperszabályai:

   $\langle S\rangle \to \langle X \text{ hosszú } a \text{ blokk}\rangle\langle X \text{ hosszú } b \text{ blokk}\rangle\langle X \text{ hosszú } c \text{ blokk}\rangle$

   $\langle X\mathbf{|} \text{ hosszú } Y \text{ blokk}\rangle \to \langle Y\rangle\langle X \text{ hosszú } Y \text{ blokk}\rangle$

   $\langle \text{ hosszú } Y \text{ blokk}\rangle \to \varepsilon$

   $\langle a\rangle \to a,\ \langle b\rangle \to b,\ \langle c\rangle \to c$

   Metaszabályai:

   $X \to \varepsilon \mid \mathbf{|}X$

   $Y \to a \mid b \mid c$

   A $G^{(1)}$ W-nyelvtan által generált nyelv: $L(G^{(1)}) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

2. Legyenek a $G^{(2)}$ W-nyelvtan hiperszabályai:

$$\langle S\rangle \to \langle X \text{ példány}\rangle\langle X \text{ példány}\rangle$$

$$\langle Xt \text{ példány}\rangle \to \langle X \text{ példány}\rangle t \qquad (t \in T)$$

$$\langle \text{ példány}\rangle \to \varepsilon$$

Metaszabályai:

$$X \to tX \,|\, \varepsilon \qquad (t \in T)$$

A $G^{(2)}$ W-nyelvtan által generált nyelv: $L(G^{(2)}) = \{uu \,|\, u \in T^*\}$.

7.3. tétel. $\mathcal{L}_W \supseteq \mathcal{L}_0$.

Bizonyítás. Legyen $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle \in \mathcal{G}_0$ ahol $\mathcal{P} = \{p_1 \to q_1, \ldots, p_n \to q_n\}$. Készítünk egy $G' = \langle G_1, G_2\rangle$ W-nyelvtant, melyre $L(G') = L(G)$.

Feltehető, hogy $\{V, E, X\} \cap N = \emptyset$. Legyen $MT = T \cup N$, $MN = \{V, E, X\}$ és $HN = \{\langle Ep_iV\rangle\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \cup \{\langle Eq_iV\rangle\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \cup \{Xt\}_{t\in T} \cup \{X, \varepsilon\}$. Legyen $G_2 = \langle MT, MN, M\mathcal{P}\rangle$, és $G_1 = \langle T, HN, H\mathcal{P}, \langle S\rangle\rangle$, ahol $M\mathcal{P}$ metaszabályai:

$$E \to ZE \,|\, \varepsilon \qquad (Z \in T \cup N)$$

$$V \to E$$

$$X \to tX \,|\, \varepsilon \qquad (t \in T),$$

míg $H\mathcal{P}$ hiperszabályai:

$$\langle Ep_iV\rangle \to \langle Eq_iV\rangle \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\langle Xt\rangle \to \langle X\rangle t \qquad (t \in T)$$

$$\langle\,\rangle \to \varepsilon$$

A példányosítás során E-ből, V-ből tetszőleges $T \cup N$ feletti mondatforma, X-ből tetszőleges, T ábécé feletti szó lehet, így

$$\begin{aligned}\{h(H\mathcal{P})\}_{h\in\text{Peld}} =&\{\langle\gamma_1 p_i \gamma_2\rangle \to \langle\gamma_1 q_i \gamma_2\rangle \,|\, \gamma_1, \gamma_2 \in (T \cup N)^*, p_i \to q_i \in \mathcal{P}\} \cup \\ &\{\langle t_1 \cdots t_k\rangle \to \langle t_1 \cdots t_{k-1}\rangle t_k \,|\, t_1 \cdots t_k \in T^+\} \cup \{\langle\,\rangle \to \varepsilon\}\end{aligned}.$$

Könnyen látható, hogy $L(G') = L(\widehat{G}) = L(G)$. □

8. Párhuzamos nyelvtanok

Az eddig látott modellekben a szabályok alkalmazása valamilyen megadott módon szekvenciálisan történt. Most tekintsünk olyan rendszereket, ahol a szabályalkalmazás párhuzamosan történik.

Általában egy G párhuzamosan dolgozó rendszernél megköveteljük, hogy minden $Z \in (T \cup N)$-re legyen átíró szabály, és ez a szabály legyen környezetfüggő. A terminálisokra a $t \to t$ átírási szabályt vehetjük. Egy levezetési lépésben minden jelet kötelezően átírunk valamely rá vonatkozó szabállyal. A levezetés egy ax axiómával indul.

Ekkor $L(G) = \{u \in T^* \mid \text{ax} \underset{G,\|}{\overset{*}{\to}} u\}$.

Példa: Aristid Lindenmayer 1968-ban a vörös algák növekedését modellezte párhuzamos átíró rendszerrel. A modelljében egy sejtnek kilenc állapota volt. Az átíró szabályok:

1→23	4→25	7→8	[→ [
2→2	5→65	8→9[3]	] →]
3→24	6→7	9→9	

Az 1 axiómából induló levezetés elemei:

1, 23, 224, 2225, 22265, 222765, 2228765, 2229[3]8765, 2229[24]9[3]8765,

2229[2265]9[225]9[24]9[3]8765, 2229[225]9[24]9[3]8765,

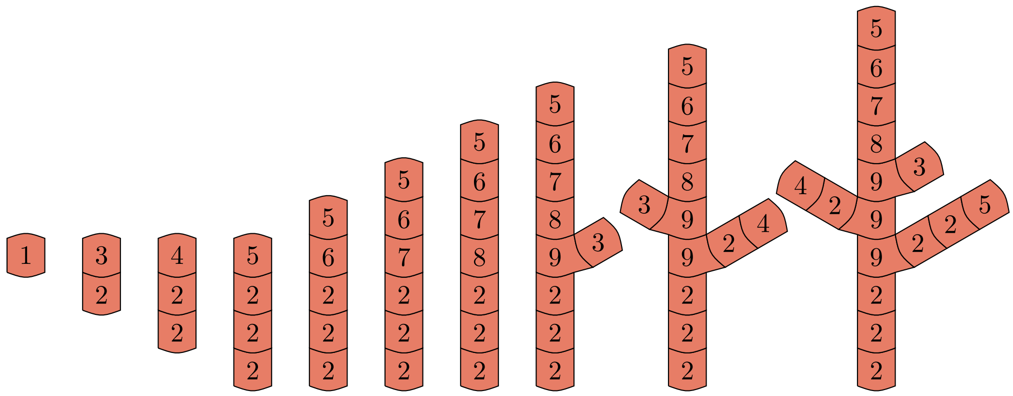
2229[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765,

2229[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765,

2229[229[3]8765]9[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765,

2229[229[24]9[3]8765]9[229[3]8765]9[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765, ...

Az alga növekedése a 8.1. ábrán látható azzal a konvencióval, hogy egy [,] zárójelpár közé írt rész oldalágat jelent.



8.1. ábra. Aristid Lindenmayer (1925-1989), magyar származású holland biológus, matematikus eredetileg a vörös algák fejlődésének tanulmányozása során fedezte fel a 60-as évek végén a róla elnevezett Lindenmayer-rendszereket.

8.1. Lindenmayer-rendszerek

8.1. definíció. *Legyenek X és Y ábécék. Egy $\sigma : 2^{X^*} \to 2^{Y^*}$ függvényt helyettesítésnek nevezünk, ha a következők teljesülnek:*

1. $\sigma(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \sigma(L_\lambda)$, *($\Lambda$ tetszőleges indexhalmaz),*
2. $\sigma(L) = \emptyset \Longleftrightarrow L = \emptyset$, *($L \subseteq X^*$),*
3. $\sigma(L_1L_2) = \sigma(L_1)\sigma(L_2)$ *($L_1, L_2 \subseteq X^*$),*
4. $\sigma(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$.

σ véges helyettesítés, ha minden $L \subseteq X^*$ véges nyelvre $\sigma(L)$ véges. σ ε-mentes helyettesítés, ha minden $L \subseteq X^*$ esetén $\varepsilon \in \sigma(L) \Longleftrightarrow \varepsilon \in L$.

A helyettesítés tulajdonságai alapján elegendő a helyettesítéseket az egyetlen egy 1-betűs szót tartalmazó elemi nyelveken megadni, melyek képei az Y ábécé feletti nemüres nyelvek. A továbbiakban ezen elemi nyelvekre az $\{t\} =: t$ azonosítással élünk (ezzel az azonosítással az egyetlen szót tartalmazó nyelvek esetében is élni fogunk). A helyettesítés nyilvánvalóan a homomorfizmus általánosítása. Ha $X = Y$, akkor jelölje $\sigma^i(L)$ a helyettesítés i-edik hatványát, melyet a $\sigma^0(L) = L, \sigma^i(L) = \sigma(\sigma^{i-1}(L)$ $(i \geq 1)$ rekurzióval definiálunk.

Példa: $X = Y = \{x, y\}$, $\sigma(x) = \{x, \varepsilon\}$, $\sigma(y) = \{y\}$. $\sigma(xxyy) = \{xxyy, xyy, yy\}$. Ha $L = \{u \in X^* \mid \ell_x(u) = \ell_y(u)\}$, akkor $\sigma(L) = \{u \in X^* \mid \ell_x(u) \leq \ell_y(u)\}$.

Egy véges helyettesítést átírási szabályokkal is megadhatunk: $\alpha \in \sigma(x) \Leftrightarrow x \to \alpha$.

8.2. definíció. *Egy $G = \langle T, \sigma, \omega_0\rangle$ rendszert Lindenmayer-rendszernek ($0L$-rendszernek, L-renszernek) nevezünk, ha T egy véges halmaz, a rendszer ábécéje, $\sigma : T \to 2^{T^*}$ véges helyettesítés, és $\omega_0 \in T^+$ egy T ábécé feletti nemüres szó, melyet axiómának nevezünk. Egy G Lindenmayer-rendszer által felismert nyelv $L(G) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma^i(\omega_0)$. A Lindenmayer-rendszer determinisztikus ($D0L$-rendszer), ha minden $t \in T$ esetén $|\sigma(t)| = 1$.*

A G által felismert nyelvet a következőképpen is definiálhattuk volna. A σ helyettesítést átírási szabályokkal adjuk meg, ekkor egy ilyen átírási szabályra azt mondjuk, hogy a Lindenmayer-rendszer szabálya. Definiáljuk a levezetés fogalmát. $\alpha, \beta \in T^*$ esetén

$$\begin{aligned}\alpha \underset{G}{\overset{(1)}{\to}} \beta \iff\ & \exists t_1, \ldots, t_k \in T, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in T^*, \alpha = t_1 \cdots t_k,\\ & \alpha = \gamma_1 \cdots \gamma_k, t_1 \to \gamma_1, \ldots, t_k \to \gamma_k \text{ szabály } G\text{-ben.}\end{aligned}$$

$\alpha \underset{G}{\overset{(n)}{\to}} \beta$, ha $\exists \gamma_0, \ldots \gamma_n \in T^*$, hogy $\alpha = \gamma_0$, $\gamma_{i-1} \underset{G}{\overset{(1)}{\to}} \gamma_i (1 \le i \le n)$ és $\beta = \gamma_n$. $\alpha \underset{G}{\overset{*}{\to}} \beta$, ha valamely $n \in \mathbb{N}$-re $\alpha \underset{G}{\overset{(n)}{\to}} \beta$. Ekkor nyílván $\alpha \in \sigma^i(\omega_0) \iff \omega_0 \underset{G}{\overset{(i)}{\to}} \alpha$. Tehát $L(G) = \{u \in T^* \mid \omega_0 \underset{G}{\overset{*}{\to}} u\}$.

$0\mathcal{L} := \{L \mid \exists G \text{ 0L-rendszer}, L(G) = L\}$,

$\mathcal{D}0\mathcal{L} := \{L \mid \exists G \text{ D0L-rendszer}, L(G) = L\}$.

Példák:

1. Lindenmayer algáinak növekedését leíró fenti σ szabályrendszer egy $\langle$`{1,2,3,4,5,6,7,8,9,[,]}`$,\sigma,$`1`$\rangle$ D0L-rendszer.

2. $\text{MISS}_3 = \langle\{x\}, \{x \to \varepsilon, x \to x^2, x \to x^5\}\rangle$ 0L-rendszer, de nem D0L-rendszer.

   $L(\text{MISS}_3) = \{x^i \mid i \ne 3\}$. Generáljuk az $x \to x^2$ szabály segítségével n lépésben az x^{2^n} szót, ahol $2^n \ge i$. Ezek után, ha i páros, akkor $i/2$ darab x-re alkalmazzuk az $x \to x^2$, a többire az $x \to \varepsilon$ szabályt. Ha i páratlan, akkor $\lfloor i/2 \rfloor - 2\,(\ge 0)$ darab x-re alkalmazzuk az $x \to x^2$, 1 darab x-re az $x \to x^5$, a többire az $x \to \varepsilon$ szabályt. Az így kapott x-ek száma $2 \cdot (\lfloor i/2 \rfloor - 2) + 5 = 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + 1 = i$. Tehát $i \ne 1, 3$ esetén így generálhatunk pontosan i darab x-et. 1 darabot is kaphatunk, hiszen ez maga az axióma. x^3 azonban nem kapható meg, hiszen az utolsó lépésben nem használhatjuk az $x \to x^5$ átírást, a másik kettővel viszont x-nek csak páros hatványát lehet generálni.

3. $\text{EXP}_2 = \langle\{x\}, \{x \to xx\}, x\rangle$. $L(\text{EXP}_2) = \{x^{2^i} \mid i \ge 0\}$.

4. LIN$= \langle\{a, b\}, \{a \to ab, b \to b\}, a\rangle$. $L(\text{LIN}) = \{ab^i \mid i \ge 0\}$.

5. FIB$= \langle\{a, b\}, \{a \to b, b \to ab\}, a\rangle$.

   FIB D0L-rendszer, azaz σ determinisztikus helyettesítés, tehát homomorfizmus. Jelölje ω_n az n. átírás után kapott szót. $\omega_0 = a, \omega_1 = b, \omega_2 = ab = \omega_0\omega_1$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $n \geq 2$-re $\omega_n = \omega_{n-2}\omega_{n-1}$. Az $n = 2$ esetet már láttuk, az indukciós lépés:

$\omega_{n+1} = \sigma(\omega_n) = \sigma(\omega_{n-2}\omega_{n-1}) = \sigma(\omega_{n-2})\sigma(\omega_{n-1}) = \omega_{n-1}\omega_n.$

Tehát $\ell(\omega_n) = \ell(\omega_{n-2}) + \ell(\omega_{n-1})$, $\ell(\omega_0) = 1$, $\ell(\omega_1) = 1$. $\ell(\omega_n)$-re ugyanaz a rekurzió teljesül, mint az $(n+1)$. Fibonacci számra, tehát $\ell(\omega_n) = F_{n+1}$, ahol F_n jelöli az n. Fibonacci számot.

Teljes indukcióval hasonlóan látható, hogy $\ell_b(\omega_n) = F_n$ $(n \geq 0)$ és $\ell_a(\omega_n) = F_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

6. SQU= $\langle\{a,b,c\},\{a \to abc^2, b \to bc^2, c \to c\}, a\rangle$ D0L-rendszer. Állítás: $\ell(\omega_n) = (n+1)^2$. Ez következik abból, ha belátjuk, hogy $\ell_a(\omega_n) = 1, \ell_b(\omega_n) = n, \ell_c(\omega_n) = n(n+1)$, hiszen $1 + n + n(n+1) = (n+1)^2$. Teljes indukcióval bizonyítjuk.

   $\ell_a(\omega_{n+1}) = 1 \cdot \ell_a(\omega_n) + 0 \cdot \ell_b(\omega_n) + 0 \cdot \ell_c(\omega_n) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot n + 0 \cdot n(n+1) = 1.$

   $\ell_a(\omega_{n+1}) = 1 \cdot \ell_a(\omega_n) + 1 \cdot \ell_b(\omega_n) + 0 \cdot \ell_c(\omega_n) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot n + 0 \cdot n(n+1) = n + 1.$

   $\ell_c(\omega_{n+1}) = 2 \cdot \ell_a(\omega_n) + 2 \cdot \ell_b(\omega_n) + 1 \cdot \ell_c(\omega_n) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot n + 1 \cdot n(n+1) = (n+1)(n+2).$

7. Nem létezik olyan G Lindenmayer-rendszer, melyre $L(G) = \{a, a^2\}$. Ugyanis, ha $\omega_0 = a$, akkor $a \xrightarrow[G]{*} a^2$, és így $a^2 \xrightarrow[G]{*} a^4$, tehát $a^4 \in L(G)$. Míg ha $\omega_0 = a^2$, akkor $a^2 \xrightarrow[G]{*} a$, de ekkor $a \xrightarrow[G]{*} \varepsilon$, mert az átírási szabályok környezetfüggetlenek, tehát $\varepsilon \in L(G)$.

8.3. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \sigma, \omega_0\rangle$ rendszert kiterjesztett (extended) Lindenmayer-rendszernek (E0L-rendszernek) nevezünk, ha G $(T \cup N)$ feletti 0L-rendszer. Egy G kiterjesztett Lindenmayer-rendszer által felismert nyelv $L(G) = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma^i(\omega_0)\right) \cap T^*$ (illetve, ami ezzel ekvivalens $L(G) = \{u \in T^* \mid \omega_0 \xrightarrow[G]{*} u\}$). G kiterjesztett determinisztikus Lindenmayer-rendszer (ED0L-rendszer), ha $(T \cup N)$ feletti D0L-rendszer.*

Példa: SYNC= $\langle\{a,b,c\},\{A,B,C,A',B',C',F\},\sigma, ABC\rangle$ Az átíró szabályok:

$A \to AA'$	$A \to a$	$A' \to A'$	$A' \to a$	$a \to F$	
$B \to BB'$	$B \to b$	$B' \to B'$	$B' \to b$	$b \to F$	
$C \to CC'$	$C \to c$	$C' \to C'$	$C' \to c$	$c \to F$	$F \to F$

Az F zsákutcának az a szerepe, hogy terminális szó generálásához egyszerre kelljen az összes nemterminálist átírni. Hiszen ha egy átírásnál marad nemterminális, akkor terminális sorozat generálásához kell, hogy legyen legalább még egy átíró lépés, de ekkor a terminálisok megváltoztathatatlanul átíródnak F-re, így viszont mégse kaphatunk terminális sorozatot. Ha viszont nem írunk át nemterminálisokat terminálisokra, akkor n átírás után determinisztikusan $A(A')^nB(B')^nC(C')^n$-t kaphatunk csak. Tehát $L(G) = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$.

$\mathcal{E}0\mathcal{L} := \{L \,|\, \exists G \text{ E0L-rendszer}, L(G) = L\}$,

$\mathcal{ED}0\mathcal{L} := \{L \,|\, \exists G \text{ ED0L-rendszer}, L(G) = L\}$.

8.4. definíció. *Egy $G = \langle T, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \omega_0 \rangle$ rendszert táblázatos Lindenmayer-rendszernek (táblázatos L-renszernek, T0L-renszernek) nevezünk, ha minden $1 \le i \le m$ esetén $G_i = \langle T, \sigma_i, \omega_0 \rangle$ 0L-rendszer. $\alpha, \beta \in T^*$ esetén $\alpha \underset{G,i}{\to} \beta \iff \alpha \overset{(1)}{\underset{G_i}{\to}} \beta$. $\alpha \underset{G}{\to} \beta \iff \exists\, 1 \le i \le m$, $\alpha \underset{G,i}{\to} \beta$. $\alpha \overset{*}{\underset{G}{\to}} \beta \iff \exists\, n, \gamma_0, \dots, \gamma_n \in T^*$, hogy $\alpha = \gamma_0$, $\gamma_{i-1} \underset{G}{\to} \gamma_i \; (1 \le i \le n)$ és $\beta = \gamma_n$. $L(G) = \{u \in T^* \,|\, \omega_0 \overset{*}{\underset{G}{\to}} u\}$ a táblázatos Lindenmayer-rendszer által generált nyelv. G determinisztikus táblázatos Lindenmayer-rendszer (TD0L-rendszer), ha minden $1 \le i \le m$ esetén G_i D0L-rendszer.*

$\mathcal{T}0\mathcal{L} := \{L \,|\, \exists G \text{ T0L-rendszer}, L(G) = L\}$,

$\mathcal{TD}0\mathcal{L} := \{L \,|\, \exists G \text{ TD0L-rendszer}, L(G) = L\}$.

8.5. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \omega_0 \rangle$ rendszert kiterjesztett (extended) táblázatos Lindenmayer-rendszernek (kiterjesztett T0L-renszernek, ET0L-renszernek) nevezünk, ha G $(T \cup N)$ feletti T0L-rendszer. Egy G ET0L-rendszer által felismert nyelv $L(G) = \{u \in T^* \,|\, \omega_0 \overset{*}{\underset{G}{\to}} u\}$. G kiterjesztett determinisztikus táblázatos Lindenmayer-rendszer (EDT0L-rendszer), ha $(T \cup N)$ feletti TD0L-rendszer.*

$\mathcal{ET}0\mathcal{L} := \{L \,|\, \exists G \text{ ET0L-rendszer}, L(G) = L\}$,

$\mathcal{ETD}0\mathcal{L} := \{L \,|\, \exists G \text{ ETD0L-rendszer}, L(G) = L\}$.

8.6. tétel. $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{E}0\mathcal{L} \subseteq \mathcal{ET}0\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\text{Ind}}$.

Bizonyítás. $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{E}0\mathcal{L}$, hiszen adjuk hozzá minden $Z \in T \cup N$-re a $Z \to Z$ szabályt az $L \in \mathcal{L}_2$ nyelvet generáló 2. típusú nyelvtanhoz. A példáknál láttuk a SYNC $\mathcal{E}0\mathcal{L}$-rendszert és azt, hogy az általa generált nyelv nem írható le 2. típusú nyelvtannal. Ezért $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{E}0\mathcal{L}$ is igaz. $\mathcal{E}0\mathcal{L} \subseteq \mathcal{ET}0\mathcal{L}$ nyilvánvaló.

Legyen $G = \langle T, N, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \text{ax} \rangle$ $\mathcal{ET}0\mathcal{L}$ rendszer, készítünk egy $G' = \langle T, N', F, \mathcal{P}', S \rangle$ teljes öröklődésű indexelt nyelvtant, melyre $L(G') = L(G)$. Legyen $N' = N \cup \widehat{T} \cup \{S, S'\}$, $F = \{f_i\}_{i=1}^n \cup \{S, S'\}$ és $F = \{f_i\}_{i=1}^n \cup \{g\}$. Vezessük be a következő jelölést, egy $\alpha \in (T \cup N)^*$ mondatforma esetén legyen $\widehat{\alpha}$ az a mondatforma, melyet úgy kapunk, hogy α-ban minden $t \in T$ terminálist a neki megfelelő $\widehat{t}$ álterminális nyelvtani jelre cserélünk. $\mathcal{P}'$ szabályai:

$$
\begin{array}{ll}
S \to S'g & \\
S' \to S'f_i & i \in \{1,\dots,n\} \\
S' \to \widehat{\mathrm{ax}} & \\
Af_i \to \widehat{q} & i \in \{1,\dots,n\},\ A \to q \in \sigma_i \\
\widehat{t}g \to t & t \in T
\end{array}
$$

Egy G-beli levezetés a következőképpen néz ki. Adva van tábláknak egy $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$ sorozata. Ha a j. táblát alkalmazzuk, akkor a mondatforma minden jelére alkalmazunk egy σ_{i_j}-beli átírási szabályt. Ennek a sorozatnak G'-ben megfelel egy $f_{i_1} \cdots f_{i_k}$ indexsorozat, mely kezdetben öröklődik az axióma minden jelére. Egy nyelvtani jel (eredeti vagy álterminális) utáni index úgy tűntethető el, ha alkalmazunk a jelre egy a megfelelő táblából vett átírási szabályt. A teljes öröklődés miatt az átírás után az újonnan bejövő jelekre öröklődik, hogy mely táblák szerint kell még majd őket tovább átírni. Az álterminálisokra azért van szükség, hogy a terminálisokra is öröklődjön, hogy mely táblákat kell még alkalmazni. Az álterminálisok csak akkor írhatók vissza terminálisokká, ha már nincs rá vonatkozó alkalmazandó tábla, tehát pontosan k darab megfelelő tábla szerinti átírás után keletkezett. Tehát G' tényleg helyesen szimulálja G működését, azaz $L(G') = L(G)$. □

8.2. CD nyelvtani rendszerek

A problémamegoldás *fekete tábla módszere*: Adott n darab ügynök és egy probléma egy táblára felírva (vagy az 1. ügynök felír egy problémát a táblára), az ügynökök célja a probléma megoldása. A probléma megoldása körökben történik. Minden körben kiáll egy ügynök a táblához, dolgozik a problémán, majd átadja egy másik ügynöknek a munkát, de későbbi körökben újra következhet.

A fekete tábla módszer egy modellje a kooperáló osztott (cooperative distributive, CD) nyelvtani rendszer. A probléma megoldásának aktuális állását (a tábla tartalmát) egy mondatforma reprezentálja. Az i. ügynök ezen a mondatformán a hozzá rendelt nyelvtani szabályok szerint dolgozhat. A CD nyelvtani rendszerek több változata ismeretes aszerint, hogy mikor adják át az egyes nyelvtanok a vezérlést egy másiknak.

8.7. definíció. *Egy $G = \langle T, N, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, S\rangle$ rendszert CD rendszernek nevezünk, ha minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $G_i = \langle T, N, \mathcal{P}_i, S\rangle$ egy nyelvtan. Ekkor n a CD rendszer komponenseinek a száma. Legyen $z \in \{t, \leq\infty\} \cup \{=k, \leq k, \geq k \mid k \geq 1\}$. A G CD-rendszerben egy $\alpha \in (T \cup N)^*$-ból egy körben, z-módban levezethető a $\beta \in (T \cup N)^*$ mondatforma,*

$$\alpha \underset{G,z}{\to} \beta \iff \exists\, i \in \{1,\dots,n\}, \alpha_0,\dots,\alpha_\ell \in (T\cup N)^*$$
$$(\alpha_0=\alpha, \alpha_\ell=\beta, \forall\, j\in\{1,\dots,\ell\} : \alpha_{j-1} \underset{G_i}{\to} \alpha_j) \wedge \varphi(z,i,\ell),$$

$$\textit{ahol}\ \varphi(z,i,\ell) = \begin{cases} \nexists \gamma \in (T\cup N)^*\ (\alpha_\ell \underset{G_i}{\to} \gamma) & z = \text{“}t\text{”} \quad \textit{(nincs több alkalmazható szabály)}, \\ \top & z = \text{“}{\le}\infty\text{”}, \\ \ell = k & z = \text{“}{=}k\text{”}, \\ \ell \le k & z = \text{“}{\le}k\text{”}, \\ \ell \ge k & z = \text{“}{\ge}k\text{”}. \end{cases}$$

$\alpha \overset{*}{\underset{G,z}{\to}} \beta \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \alpha_0,\dots,\alpha_n \in (T\cup N)^*\ (\alpha_0=\alpha, \alpha_n=\beta, \forall\, j\in\{1,\dots,n\} : \alpha_{j-1} \underset{G,z}{\to} \alpha_j)$.
$L^z(G) = \{u \in T^* \mid S \overset{*}{\underset{G,z}{\to}} u\}$.

Példák:

1. $G_1 = \langle \{a,b,c\}, \{S,A,B,C,A',B',C'\}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, S\rangle$.

$\mathcal{P}_1$ szabályai	$\mathcal{P}_2$ szabályai	$\mathcal{P}_3$ szabályai
$S \to ABC$	$A \to aA'$	$A \to \varepsilon$
$A' \to A$	$B \to bB'$	$B \to \varepsilon$
$B' \to B$	$C \to cC'$	$C \to \varepsilon$
$C' \to C$		
$S \to S$		

$L^t(G_1) = L^{=3}(G_1) = L^{\ge 3}(G_1) = \{a^n b^n c^n \mid n \ge 0\}$.

$L^{\le 3}(G_1) = L^{\le\infty}(G_1) = \{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \mid n_1,n_2,n_3 \ge 0\}$.

2. $G_2 = \langle T, \{S, X_1, X_1', X_2, X_2'\}, \mathcal{P}_{\text{kezd}}, \mathcal{P}_t\ (t\in T), \mathcal{P}_{\text{vége}}, S\rangle$.

$\mathcal{P}_{\text{kezd}}$ szabályai	$\mathcal{P}_t\ (t\in T)$ szabályai	$\mathcal{P}_{\text{vége}}$ szabályai
$S \to X_1X_2$	$X_1 \to tX_1'$	$X_1 \to \varepsilon$
$X_1' \to X_1$	$X_2 \to tX_2'$	$X_2 \to \varepsilon$
$X_2' \to X_2$		
$S \to S$		

$L^t(G_2) = L^{=2}(G_2) = L^{\ge 2}(G_2) = \{uu \mid u \in T^*\}$.

3. $G_3 = \langle \{a\}, \{S,Z\}, \{S \to ZZ\}, \{Z \to S\}, \{S \to a\}, S\rangle$. Ekkor $L^t(G_3) = \{a^{2^n} \mid n \ge 0\}$.

A $G = \langle T, N, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, S\rangle$ CD rendszer i. típusú, ha $G_j = \langle T, N, \mathcal{P}_j, S\rangle$ minden $j \in \{1,\dots,n\}$ esetén i. típusú nyelvtan.

$\mathcal{CD}_i^z = \{L \mid \exists G$ i. típusú, z-módban dolgozó CD rendszer, melyre $L^z(G) = L\}$. ($z \in \{t, \leq\infty\} \cup \{=k, \leq k, \geq k \mid k \geq 1\}$.)

8.8. tétel. *$\mathcal{CD}_i^z = \mathcal{L}_i$, $(i = 0, 1, 3)$, $z \in \{t, \leq\infty\} \cup \{=k, \leq k, \geq k \mid k \geq 1\}$.*

Bizonyítás. $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{CD}_i^z$, ugyanis ha $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle \in \mathcal{G}_i$ generálja $L \in \mathcal{L}_i$-t, akkor az 1 komponensű $G' = \langle T, N, \mathcal{P} \cup \{S' \to S, S \to S\}, S'\rangle$ CD rendszer i. típusú és $L(G)$-t generálja minden módban.

Legyen $G = \langle T, N, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n, S\rangle$ i. típusú CD-rendszer. Készítünk egy $G' = \langle T, N', \mathcal{P}', S'\rangle$ i. típusú nyelvtant, melyre $L(G') = L(G)$.

$\leq\infty$ mód esetén legyen $N' = N$, $S' = S$ és $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{\leq\infty} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j$, ekkor G' i. típusú nyelvtan, melyre $L(G') = L(G)$.

$=k$ mód és $i = 0, 1$ esetén legyen $N' = N'_{=k} = N \cup \{X_j^r\}_{1\leq r\leq n,\, 0\leq j\leq k}$, a $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{=k}$ szabályrendszer:

$$
\begin{array}{ll}
S' \to X_0^r & 1 \leq r \leq n, \\
pX_j^r \to qX_{j+1}^r & 1 \leq r \leq n,\ 0 \leq j < k,\ p \to q \in \mathcal{P}_r, \\
X_k^r \to X_0^{r'} & 1 \leq r, r' \leq n, \\
ZX_j^r \to X_j^r Z & 1 \leq r \leq n,\ 0 \leq j \leq k,\ Z \in T \cup N, \\
X_j^r Z \to ZX_j^r & 1 \leq r \leq n,\ 0 \leq j \leq k,\ Z \in T \cup N, \\
X_k^r \to \varepsilon & 1 \leq r \leq n.
\end{array}
$$

$=k$ mód és $i = 3$ esetén legyen $N' = N'_{=k} = \{A_j^r\}_{1\leq r\leq n,\, 0\leq j\leq k,\, A\in N} \cup \{S'\}$, a $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{=k}$ szabályrendszer:

$$
\begin{array}{ll}
S' \to S_0^r & 1 \leq r \leq n, \\
A_j^r \to uB_{j+1}^r & 1 \leq r \leq n,\ 0 \leq j < k,\ A \to uB \in \mathcal{P}_r, \\
A_k^r \to A_0^{r'} & 1 \leq r, r' \leq n,\ A \in N, \\
A_{k-1}^r \to u & 1 \leq r \leq n,\ A \to u \in \mathcal{P}_r.
\end{array}
$$

$\leq k$ mód és $i = 0, 1$ esetén legyen $N' = N'_{\leq k} = N'_{=k}$ és $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{\leq k} = \mathcal{P}'_{=k} \cup \mathcal{P}''$, ahol a $\mathcal{P}''$ szabályrendszer:

$$
\begin{array}{ll}
X_j^r \to X_0^{r'} & 1 \leq r, r' \leq n,\ 0 \leq j < k, \\
X_j^r \to \varepsilon & 1 \leq r \leq n,\ 0 \leq j < k,
\end{array}
$$

míg $i = 3$ esetén a $\mathcal{P}''$ szabályrendszer:

$$A_j^r \to A_0^{r'} \qquad 1 \le r, r' \le n,\ 0 \le j < k,\ A \in N,$$
$$A_j^r \to u \qquad 1 \le r \le n,\ 0 \le j < k-1,\ A \to u \in \mathcal{P}_r.$$

$\ge k$ mód és $i = 0,1$ esetén legyen $N' = N'_{\ge k} = N'_{=k}$ és $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{\ge k} = \mathcal{P}'_{=k} \cup \{pX_k^r \to qX_k^r \,|\, 1 \le r \le n,\ p \to q \in \mathcal{P}_r\}$, míg $i = 3$ esetén $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{\ge k} = \mathcal{P}'_{=k} \cup \mathcal{P}''$, ahol a $\mathcal{P}''$ szabályrendszer:

$$A_k^r \to uB_k^r \qquad 1 \le r \le n,\ A \to uB \in \mathcal{P}_r,$$
$$A_k^r \to u \qquad 1 \le r \le n,\ A \to u \in \mathcal{P}_r.$$

t-módban akkor lehet $\mathcal{P}_r$-beli szabály után $\mathcal{P}_{r'}$-beli szabályt alkalmazni ($r' \ne r$), ha már $\mathcal{P}_r$-beli szabályt nem lehet alkalmazni. Ennek ellenőrzésére $i = 0,1$ esetén párhuzamosan futtatunk az aktuális mondatformával mint inputtal $T \cup N$ feletti KMP-automatákat, ahol a minták a $\mathcal{P}_r$-beli szabályok baloldalai. Akkor és csak akkor válthatunk valamely másik $\mathcal{P}_{r'}$ szabályrendszerre ha az input végigolvasása után egyik automata se találja meg a mintáját.

Minden $1 \le r \le n$ esetén jelölje $s(r) = |\mathcal{P}_r|$ és legyen $\mathcal{P}_r = \{p_1^r \to q_1^r, \ldots, p_{s(r)}^r \to q_{s(r)}^r\}$. Legyen továbbá az m mintát felismerő KMP-automata $\mathcal{A}^m = \langle \{a_i\}_{0 \le i \le \ell(m)}, T \cup N, \delta^m, a_0, \{a_{\ell(m)}\} \rangle$.

Legyen tehát $N' = N_t = N \cup \{X_r\}_{1 \le r \le n} \cup \{W^r_{i_1,\ldots,i_{s(r)}}\}_{\forall 1 \le j \le s(r):\ i_j \in \{0,\ldots,\ell(p_j^r)\}} \cup \{S', L, R\}$, továbbá a $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_t$ szabályrendszer legyen a következő:

$$S' \to LSX_rR \qquad 1 \le r \le n,$$
$$pX_r \to qX_r \qquad 1 \le r \le n,\ p \to q \in \mathcal{P}_r,$$
$$ZX_r \to X_rZ \qquad 1 \le r \le n,\ Z \in T \cup N,$$
$$X_rZ \to ZX_r \qquad 1 \le r \le n,\ Z \in T \cup N,$$
$$LX_r \to LW^r_{0,\ldots,0} \qquad 1 \le r \le n,$$
$$W^r_{i_1,\ldots,i_{s(r)}}Z \to ZW^r_{i'_1,\ldots,i'_{s(r)}} \qquad 1 \le r \le n,\ Z \in T \cup N,\ \forall 1 \le j \le s(r) :\ \delta^{p_j^r}(a_{i_j}, Z) = a_{i'_j},$$
$$W^r_{i_1,\ldots,i_{s(r)}}R \to X_rR \qquad 1 \le r \le n, \exists 1 \le j \le s(r) :\ i_j = \ell(p_j^r),$$
$$W^r_{i_1,\ldots,i_{s(r)}}R \to X_{r'}R \qquad 1 \le r, r' \le n, r' \ne r,\ \forall 1 \le j \le s(r) :\ i_j < \ell(p_j^r),$$
$$X_r \to \varepsilon \qquad 1 \le r \le n,$$
$$L \to \varepsilon, R \to \varepsilon.$$

$i = 3$ esetén legyen $N' = N'_t = \{A_r\}_{1 \le r \le n,\, A \in N} \cup \{S'\}$, a $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_t$ szabályrendszer:

$$\begin{array}{ll} S' \to S_r & 1 \le r \le n, \\ A_r \to uB_r & 1 \le r \le n,\ A \to uB \in \mathcal{P}_r, \\ A_r \to u & 1 \le r \le n,\ A \to u \in \mathcal{P}_r, \\ A_r \to A_{r'} & 1 \le r, r' \le n,\ r' \ne r,\ A \notin \{\mathrm{bo}(P) \mid P \in \mathcal{P}_r\}. \end{array}$$

A konstrukciókból nyilvánvaló, hogy minden esetben $L(G') = L(G)$. $i = 0, 3$ esetén G' i. típusú nyelvtan. $i = 1$ esetén $=k$, $\le k$, $\ge k$ módok esetén G' 2-korlátolt, t-mód esetén 4-korlátolt nyelvtan. Így az 1.7 és 1.8 tételek szerint $L(G')$ generálható $\mathcal{G}_1$-beli nyelvtannal. □

8.9. tétel. *$\mathcal{CD}_2^t = \mathcal{ET}0\mathcal{L}$.*

8.3. PC rendszerek

A párhuzamosan kommunikáló (parallel communicating, PC) rendszerekben a kooperáló nyelvtanoknak kétfajta lépése van: a szokásos munkalépés, és az információcserélő lépés. A munkalépések szinkronizáltak, azaz a nyelvtanok egy ütemben egyszerre 1-1 levezetési lépést tesznek. Az utóbbi esetben ha valamelyik nyelvtan kereső (query) szimbólumot vezet le, akkor elkéri a kérdezett nyelvtantól az addig levezetett mondatformáját.

8.10. definíció. *Egy $G = \langle T, N, K, (\mathcal{P}_1, S_1), \ldots, (\mathcal{P}_\ell, S_\ell)\rangle$ rendszert PC rendszernek nevezünk, ha $K = \{Q_1, \ldots, Q_\ell\}$, azaz $|K| = \ell$, $K \cap N = \emptyset$ és minden $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ esetén $G_i = \langle T, N \cup K \setminus \{Q_i\}, \mathcal{P}_i, S_i\rangle$ egy olyan nyelvtan, ahol $\mathcal{P}_i$-ben szabály baloldalán nem szerepel K-beli jel. Ekkor Q_i-t az i. nyelvtanhoz tartozó keresőszimbólumnak nevezzük, ℓ pedig a PC-rendszer komponenseinek a száma.*

$[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell]$ a PC-rendszer egy konfigurációja, ha minden $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ esetén $\alpha_i \in (T \cup N \cup K \setminus \{Q_i\})^*$.

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell] \underset{G,d}{\to} [\beta_1, \ldots, \beta_\ell] \iff \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}\, (\alpha_i \in (T \cup N)^* \wedge \alpha_i \underset{G_i}{\to} \beta_i).$$

Definiáljuk a $h_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell]} : (T \cup N \cup K)^* \to (T \cup N \cup K)^*$ homomorfizmust a következőképpen $T \cup N \cup K$ elemein

$$h_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell]}(Z) = \begin{cases} \alpha_i & \textit{valamely } i \in \{1, \ldots, \ell\}\textit{-re } Z = Q_i \wedge \alpha_i \in (T \cup N)^* \\ Z & \textit{egyébként} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell] \underset{G,q}{\to} [\beta_1, \ldots, \beta_\ell] \iff & \exists i \in \{1, \ldots, \ell\}(\alpha_i \in (T \cup N \cup K)^* K (T \cup N \cup K)^*) \\ & \wedge \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}(\beta_i = h_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell]}(\alpha_i)).\end{aligned}$$

$[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell] \underset{G}{\to} [\beta_1, \ldots, \beta_\ell]$, ha $[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell] \underset{G,d}{\to} [\beta_1, \ldots, \beta_\ell]$ vagy $[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell] \underset{G,q}{\to} [\beta_1, \ldots, \beta_\ell]$.

$C \xrightarrow[G]{*} C'$, ha létezik $n \in \mathbb{N}$, $C_0, \dots C_n$ konfigurációk, hogy $C_0 = C$, $C_n = C'$, és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $C_{i-1} \xrightarrow[G]{} C_i$.

$L(G) = \{u \in T^* \mid \exists \beta_2, \dots, \beta_\ell \in (T \cup N \cup K)^* [S_1, \dots, S_\ell] \xrightarrow[G]{*} [u, \beta_2, \dots, \beta_\ell]\}$.

Példák:

1. $G_1 = \langle \{a, b, c\}, \{S_1, S_2, S_2', S_3, S_3', S_3''\}, \{Q_1, Q_2, Q_3\}, (\mathcal{P}_1, S_1), (\mathcal{P}_2, S_2), (\mathcal{P}_3, S_3)\rangle$, ahol

$\mathcal{P}_1$ szabályai	$\mathcal{P}_2$ szabályai	$\mathcal{P}_3$ szabályai
$S_1 \to aS_1$	$S_2 \to bS_2$	$S_3 \to cS_3$
$S_1 \to Q_2$	$S_2 \to S_2'$	$S_3 \to S_3'$
$S_2' \to Q_3$	$S_2' \to S_2'$	$S_3' \to S_3''$
$S_3'' \to \varepsilon$		$S_3'' \to S_3''$

   $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2. $G_2 = \langle T, \{S_1, S_2\}, \{Q_1, Q_2\}, (\mathcal{P}_1, S_1), (\mathcal{P}_2, S_2)\rangle$, ahol

$\mathcal{P}_1$ szabályai	$\mathcal{P}_2$ szabályai
$S_1 \to S_1$	$S_2 \to tS_2 \quad (t \in T)$
$S_1 \to Q_2Q_2$	$S_2 \to \varepsilon$

   $L(G) = \{uu \mid u \in T^*\}$.

3. $G_3 = \langle \{a\}, \{S_1, S_2, A\}, \{Q_1, Q_2\}, (\mathcal{P}_1, S_1), (\mathcal{P}_2, S_2)\rangle$, ahol

$\mathcal{P}_1$ szabályai	$\mathcal{P}_2$ szabályai
$S_1 \to Q_2$	$S_2 \to aA$
$A \to Q_2$	$A \to aaA$
$A \to \varepsilon$	

   $L(G) = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$.

A $G = \langle T, N, K, (\mathcal{P}_1, S_1), \dots, (\mathcal{P}_\ell, S_\ell)\rangle$ PC rendszer i. típusú, ha $G_j = \langle T, N \cup K \setminus \{Q_j\}, \mathcal{P}_j, S_j\rangle$ minden $j \in \{1, \dots, \ell\}$ esetén i. típusú nyelvtan.

$\mathcal{PC}_i = \{L \mid \exists G$ i. típusú PC rendszer, melyre $L(G) = L\}$.

Mivel minden nyelvtan tekinthető egy 1 komponensű PC rendszernek, ezért $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{PC}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. A fenti példák mutatják, hogy a párhuzamos számítás már a 3. típusú nyelvtanok erejét is jelentősen megnöveli, $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{PC}_3$, sőt $\mathcal{PC}_3 \cap \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$. $\mathcal{PC}_2$ és $\mathcal{L}_1$ viszonya máig nyitott kérdés.