

Feladatok

1. A *CYK algoritmus* segítségével döntsük el, hogy *cabcab* eleme-e a $G = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B, C, D, E\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvnek! \mathcal{P} :

$$S \longrightarrow AD \mid EB \mid SS$$

$$A \longrightarrow AB \mid a$$

$$B \longrightarrow DD \mid b$$

$$C \longrightarrow CB \mid c$$

$$D \longrightarrow EC \mid a$$

$$E \longrightarrow AD \mid b$$

2. Készítsünk véges determinisztikus automatát, mely az alábbi $G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvet fogadja el! \mathcal{P} :

$$S \longrightarrow aA \mid aC \mid bB \mid \varepsilon$$

$$A \longrightarrow aC \mid bS \mid bC$$

$$B \longrightarrow bS \mid bC \mid \varepsilon$$

$$C \longrightarrow aS \mid aC \mid bB$$

3. Készítsünk a következő \mathcal{A} automatával ekvivalens *minimális állapotszámú* véges determinisztikus automatát a tanult algoritmussal!

$$\mathcal{A} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{4, 5, 6, 8\} \rangle$$

	a	b
→ 1	7	6
2	1	2
3	9	1
← 4	1	4
← 5	6	4
← 6	6	2
7	9	8
← 8	8	2
9	1	8

4. Igazoljuk, hogy az alábbi L nyelvhez nem adható 3. típusú nyelvtan, mely L -et generálja! (Azaz $L \notin \mathcal{L}_3$.)

$$L = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid (\forall v \subseteq u, v = bv'b, v' \in \{a, c\}^*) (\ell_a(v) = \ell_c(v) + 1)\}$$

Példák L -beli szavakra: *ccac, babaa, cbcacaabacab*.

5. Készítsünk veremautomatát, mely az előző feladat L nyelvét fogadja el!

6. A *CYK algoritmus* segítségével döntsük el, hogy *aabbcc* eleme-e a $G = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvnek! \mathcal{P} :

$$S \longrightarrow AS \mid SB \mid a$$

$$A \longrightarrow BC \mid a$$

$$B \longrightarrow AB \mid CC \mid b$$

$$C \longrightarrow AB \mid c$$

7. Készítsünk a tanult algoritmussal véges determinisztikus automatát, mely a következő $G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C, D\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvet fogadja el. \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aA \mid aD \\ A &\longrightarrow aB \mid bA \mid bC \\ B &\longrightarrow bS \mid bC \mid \varepsilon \\ C &\longrightarrow aD \mid \varepsilon \\ D &\longrightarrow aB \mid aD \mid bC \end{aligned}$$

8. Készítsünk a következő \mathcal{A} automatával ekvivalens *minimális állapotszámú* véges determinisztikus automatát a tanult algoritmussal! $\mathcal{A} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{4, 5, 7\} \rangle$

	a	b
→ 1	2	4
2	3	1
3	6	1
← 4	4	5
← 5	5	7
6	2	8
← 7	7	3
8	3	4

9. Igazoljuk, hogy az alábbi L nyelvhez nem adható 3. típusú nyelvtan, mely L -et generálja! (Azaz $L \notin \mathcal{L}_3$.)

$$L = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid \ell_a(u) = \ell_c(u), \ell_a(u) + \ell_b(u) \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$$

10. Igazoljuk, hogy az előző feladat L nyelve 2. típusú. (Azaz készítsünk L -et generáló 2. típusú nyelvtant, vagy L -et elfogadó veremautomatát!)

11. A *CYK-algoritmus* segítségével döntse el, hogy az *aabbcc* szó levezethető-e a következő nyelvtanban:

$$S \rightarrow CB, \quad A \rightarrow CB \mid a, \quad B \rightarrow BB \mid CC \mid b, \quad C \rightarrow AA \mid c.$$

Ha igen, akkor adja meg a szó egy lehetséges levezetését!

12. Határozza meg *reguláris kifejezéssel* az alábbi véges determinisztikus automata által elfogadott nyelvet! (Ha nem az ismert módszereket használja, igazolja, hogy a két nyelv megegyezik!)

	a	b
→ q_0	q_1	q_2
q_1	q_4	q_3
← q_2	q_4	q_3
← q_3	q_3	q_0
q_4	q_4	q_4

13. Készítsen a következő automatával ekvivalens *minimális állapotszámú* véges determinisztikus automatát a tanult algoritmussal!

		a	b
→	1	2	8
	2	4	1
	3	5	8
←	4	3	5
←	5	6	4
	6	4	1
←	7	1	7
	8	6	8

14. Igazolja, hogy az $L = \{uu^{-1}u^{-1} \mid u \in \{a, b\}^*\}$ nyelv NEM 2. típusú.
15. Jelölje $\text{Pre}(u)$ egy u szó prefixeinek (kezdőszeleteinek) halmazát. Például $\text{Pre}(aaba) = \{\varepsilon, a, aa, aab, aaba\}$. Készítsen *veremautomatát* az

$$L = \{u \in \{a, b\}^* \mid (\forall v \in \text{Pre}(u)) (\ell_a(v) \geq 2 \cdot \ell_b(v))\}$$

nyelvhez! Példa L -beli szóra: $aaabab \in L$.

16. A *CYK-algoritmus* segítségével döntse el, hogy az $abcabc$ szó levezethető-e a következő nyelvtanban:

$$S \rightarrow AA, \quad A \rightarrow AB \mid AC \mid a, \quad B \rightarrow CA \mid b, \quad C \rightarrow c.$$

Ha igen, akkor adja meg a szó egy lehetséges levezetését!

17. Határozza meg *reguláris kifejezéssel* az alábbi véges determinisztikus automata által elfogadott nyelvet! (Ha nem az ismert módszereket használja, igazolja, hogy a két nyelv megegyezik!)

		a	b
→	q_0	q_1	q_2
←	q_1	q_3	q_4
	q_2	q_3	q_4
←	q_3	q_0	q_3
	q_4	q_4	q_4

18. Készítsen a következő automatával ekvivalens *minimális állapotszámú* véges determinisztikus automatát a tanult algoritmussal!

		a	b
→	1	2	7
	2	1	7
←	3	1	5
←	4	4	8
←	5	2	3
	6	4	6
	7	5	6
	8	3	6

19. Igazolja, hogy az $L = \{uu^{-1}u \mid u \in \{a, b\}^*\}$ nyelv NEM 2. típusú.
20. Jelölje $\text{Pre}(u)$ egy u szó prefixeinek (kezdőszeleteinek) halmazát. Például $\text{Pre}(aaba) = \{\varepsilon, a, aa, aab, aaba\}$. Készítsen veremautomatát az

$$L = \{u \in \{a, b\}^* \mid (\forall v \in \text{Pre}(u) \setminus \{\varepsilon\}) (\ell_a(v) < \ell_b(v))\}$$

nyelvhez! Példa L -beli szóra: $bbbaaba$.

21. A *CYK algoritmus* segítségével döntsük el, hogy $abccab$ eleme-e a $G = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvnek! \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid SC \\ A &\longrightarrow AC \mid a \mid c \\ B &\longrightarrow BC \mid b \mid c \\ C &\longrightarrow CS \mid SS \mid c \end{aligned}$$

22. Készítsünk véges determinisztikus automatát (VDA-t), mely a $G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvet fogadja el! \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aA \mid aS \\ A &\longrightarrow aS \mid bC \mid \varepsilon \\ B &\longrightarrow aS \\ C &\longrightarrow aB \mid bA \mid bC \mid \varepsilon \end{aligned}$$

23. Igazoljuk, hogy az $L \notin \mathcal{L}_3$!
- $L = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid u \text{ bármely két } b \text{ betűje között 1-gyel több } a \text{ betű van mint } c\}$
24. Igazoljuk, hogy az előző feladat L nyelvére $L \in \mathcal{L}_2$. (Készítsünk hozzá 2. típusú nyelvtant vagy veremautomatát!)

25. A *CYK algoritmus* segítségével döntsük el, hogy $aabba$ eleme-e a $G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C, D\}, \mathcal{P}, S \rangle$ nyelvtan által generált nyelvnek! \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid CD \\ A &\longrightarrow AA \mid CS \mid a \\ B &\longrightarrow BB \mid DS \mid b \\ C &\longrightarrow DA \mid CB \mid a \\ D &\longrightarrow DD \mid b \end{aligned}$$

26. Készíts véges determinisztikus automatát (VDA-t), mely éppen az $(ab \cup a)^*b \cup a$ nyelvet fogadja el!

27. Készíts a következő VDA-val ekvivalens minimális állapotszámú VDA-t!
- $\mathcal{A} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{4, 8, 9\} \rangle$

	a	b
→ 1	2	3
2	4	2
3	2	7
← 4	6	5
5	9	6
6	8	7
7	9	7
← 8	8	9
← 9	8	8

28. Igazold, hogy az $L = \{a^k b^n c^\ell \mid k, n, \ell \in \mathbb{N}, k + \ell = 2n\}$ nyelvhez nem adható 3. típusú nyelvtan, mely L -et generálja! (Azaz $L \notin \mathcal{L}_3$)

29. Készíts veremautomatát, mely az előző feladat L nyelvét fogadja el!

30. Tekintsük a következő grammatikát:

$$G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S \rangle$$

$$\mathcal{P}: S \longrightarrow AB \mid CC$$

$$A \longrightarrow CC$$

$$B \longrightarrow BC \mid a$$

$$C \longrightarrow a \mid b$$

A CYK algoritmus segítségével döntse el, hogy a nyelv tartalmazza-e a *baaba* szót!

31. Készítsen az alábbi nyelvhez véges determinisztikus automatát (VDA-t)!

$$L = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid ac \text{ nem részszoja az } u \text{ szónak és } \ell_a(u) + \ell_c(u) \text{ páros}\}$$

32. A tanult algoritmusok segítségével adjon véges determinisztikus automatát (VDA-t), mely az alábbi grammatika által generált nyelvet fogadja el!

$$G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, \mathcal{P}, S \rangle$$

$$\mathcal{P}: S \longrightarrow bS \mid bC$$

$$A \longrightarrow bA \mid \varepsilon$$

$$B \longrightarrow aC \mid bS \mid bA \mid bC \mid \varepsilon$$

$$C \longrightarrow aB \mid aC \mid bA$$

33. Bizonyítsa be, hogy a következő nyelv szigorú típusa 2-es!

$$L = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid \ell_a(u) = \ell_b(u) \text{ és } b \text{ betű után közvetlen nem állhat } c \text{ betű}\}$$

A szigorú típus bizonyításaként adjon a nyelvhez környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikát, valamint lássa be, hogy 3-as típusú grammatika nem adható hozzá!

34. Adjon veremautomatát az alábbi nyelvhez!

$$L = \{u \in \{aa, b\}^* \mid \ell_a(u) = 2 \cdot \ell_b(u)\}$$

35. Tekintsük a következő grammatikát:

$$G = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, U, V, W, X\}, \mathcal{P}, S \rangle$$

$$\mathcal{P} : \begin{array}{ll} S \longrightarrow AU \mid BV & W \longrightarrow VV \mid BU \\ U \longrightarrow AX \mid BS \mid b & X \longrightarrow UU \mid AV \\ V \longrightarrow AS \mid BW \mid a & A \longrightarrow a \\ & B \longrightarrow b \end{array}$$

A CYK algoritmus segítségével döntse el, hogy a nyelv tartalmazza-e az *abbaaa* szót!

36. Adjon az $(aba)^* \cup a^*$ reguláris kifejezéssel definiált nyelvhez véges determinisztikus automatát (VDA-t)!

37. A tanult algoritmussal adjon az alábbi VDA-val ekvivalens minimális állapotszámú automatát!

$$\mathcal{A} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{2, 3, 9\} \rangle$$

	a	b
→ 1	4	6
← 2	3	5
← 3	2	5
4	9	2
5	2	3
6	8	7
7	8	1
8	9	3
← 9	9	9

38. Bizonyítsa be, hogy a következő nyelv szigorú típusa 2-es!

$$L = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = u^{-1} \text{ (palindróma) és } \ell_a(u) \text{ osztható } 4\text{-gyel}\}$$

A szigorú típus bizonyításaként adjon a nyelvhez környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikát, valamint lássa be, hogy 3-as típusú grammatika nem adható hozzá!

39. Adjon veremautomatát az alábbi nyelvhez!

$$L = \{u \in \{x, y, z\}^* \mid \text{az } u \text{ szóban nincsen } xy \text{ részszó és } \ell_x(u) = \ell_y(u)\}$$