Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Általános Számítástudományi Tanszék

A PÁRHUZAMOS PROGRAMOZÁS ALAPJAI

FELADATGYŰJTEMÉNY - VÁZLAT

BUDAPEST, 2001.

Minden észrevételt, amely valamilyen hibára vonatkozik örömmel fogadok.

Budapest, 2001. szeptember 24.

Horváth Zoltán

Chapter 1

Leggyengébb előfeltétel

Feladat 1.1 *Számoljuk ki az $lf(S,R)$ -t!*

Legyen $S = \{x := 5\}$, és R::=$(0 < x+y < 7)$. Ekkor $lf(S,R)$ kiszámítása :

$$lf(x := 5, 0 < x + y < 7) = 0 < 5 + y < 7$$

Feladat 1.2 *Számoljuk ki az $lf(S,R)$ -t!*

Legyen most

$$S_1 = x := \begin{cases} 5, & \text{ha } \ y < 2 \\ x, & \text{ha } \ y \geq 2 \end{cases}$$

Ekkor

$$lf(S_1, R) = ((y < 2) \rightarrow (0 < 5 + y < 7)) \wedge ((y \geq 2) \rightarrow (0 < x + y < 7))$$

A továbbiakban csak olyan S -t használunk, amelyre $\mathcal{D}_{p(S)} = A$. Szimultán feltételes értékadásoknál, ahol a feltétel nem teljesül, ott a $SKIP$ ág hajtódik végre.

Feladat 1.3 *Számoljuk ki az $lf(S,R)$ -t!*

$$lf(x := 2x, x < 10) = (x < 10)^{x \leftarrow 2x} = (2x < 10) = (x < 5)$$

$$lf(x, y := x + 1, y - 1, 2|x + y) = (2|x + 1 + y - 1) = (2|x + y)$$

$$lf(x := 7, x > 0) = (7 > 0) = \uparrow$$

Feladat 1.4 *Számoljuk ki az $lf(S,R)$ -t!*

Legyen most

$$S_2 = x := \begin{cases} -x, & \text{ha } x < 0 \\ SKIP, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

,és legyen R::=$(x < 0)$. Ekkor a leggyengébb előfeltt́el :

$$lf((x := -x, \text{ha} x < 0), x > 0) = ((x < 0) \to (x > 0)^{x:=-x}) \wedge$$

$$\wedge (x \geq 0 \to (x > 0)^{SKIP}) = (x < 0 \to x < 0) \wedge$$

$$\wedge (x \geq 0 \to x > 0) = (x \geq 0 \vee x < 0) \wedge (x < 0 \vee x > 0) =$$

$$= \uparrow \wedge (x \neq 0) = (x \neq 0)$$

Feladat 1.5 *Számoljuk ki az $lf(S,R)$ -t!*

Legyen most

$$S_3 = x := ((x, l := x * z, \uparrow, \text{ ha} z > 0) \| z), \text{ha } z \neq extr$$

és legyen R::=$(x < 0)$. Ekkor a leggyengébb előfeltétel :

$$lf(S_3, R) = (z = extr \to x > 0) \wedge (z \neq extr \to ((z \leq 0 \to x > 0) \wedge$$

$$\wedge (z > 0 \to x{*}z > 0))) = (z = extr \to x > 0) \wedge (z \neq extr \wedge z \leq 0 \to x > 0) \wedge$$

$$\wedge (z \neq extr \wedge z > 0 \to x * z > 0) = (z = extr \to x > 0) \wedge$$

$$\wedge (z \neq extr \wedge z \leq 0 \to x > 0) \wedge (z \neq extr \wedge z > 0 \to x > 0) =$$

$$= (z = extr \vee (z \neq extr \wedge z \leq 0) \vee (z \neq extr \wedge z > 0)) \to$$

$$\to (x > 0) = \uparrow \to x > 0 = \downarrow \vee x > 0 = x > 0$$

Feladat 1.6 *Számoljuk ki az $lf(S,R)$ -t!*

$$lf((x, y := x + k, y - l \text{ ha } z \leq y < 2z), (0 \leq y \wedge 1 \leq k \wedge$$

$$\wedge k = 2^n \wedge z = N * k \wedge x * N + y = M))$$

Ez házi feladat ...

Chapter 2

Stabilitás tulajdonságai

A $\rhd_S$ tulajdonságai :

1. $\uparrow \rhd_S \uparrow$
2. $\uparrow \rhd_S P$
3. $\downarrow \rhd_S P$
4. $P \rhd_S \uparrow$
5. $P \rhd_S P$
6. $P \rhd_S \neg P$

Feladat 2.1 *(Gyengítési tétel) Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q, \;\; Q \Rightarrow R}{P \rhd_S R}$$

Megoldás :

A $\rhd_S$ definíciója miatt azt kellene belátni, hogy :

$$\frac{P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q), \; Q \Rightarrow R}{P \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee R)}$$

A $Q \Rightarrow R$ miatt tudjuk, hogy $\neg R \Rightarrow \neg Q$, ezért $P \wedge \neg R \Rightarrow$
$\Rightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow \; lf(S, P \vee Q) \Rightarrow lf(S, P \vee R)$ Ezzel beláttuk a feladatot.

Feladat 2.2 *(erősítési tétel) Igaz-e?*

$$\frac{P \Rightarrow Q, \;\; Q \rhd_S R}{P \rhd_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz! Első ellenpélda :

$$A : \mathbf{N},\ Q{::=}(x = 1 \vee x = 2)$$

$$R{::=}(x = 3)$$

$$P{::=}(x = 1)$$

$$S{::=}\{x := 2\}$$

Ekkor $P \Rightarrow Q$ teljesül, és $Q \rhd_S R$ is:

$$Q \wedge \neg R = ((x = 1) \vee (x = 2) \wedge (x \neq 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(x := 2, ((x = 1) \vee (x = 2)) \vee (x = 3)) = \uparrow$$

Viszont a $P \rhd_S R$ nem áll fenn, mivel :

$$P \wedge \neg R = ((x = 1) \wedge (x \neq 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(x := 2, (x = 1) \vee (x = 3)) = \downarrow$$

És azt is tudjuk,hogy $\{1\} \subseteq \lceil P \wedge \neg R \rceil$

Második ellenpélda : [1]

$$Q{::=}\uparrow \quad R{::=}\downarrow$$

Ekkor $P \Rightarrow \uparrow$ és $\uparrow \rhd_S R$ fennállnak, viszont tudjuk, hogy (a $\rhd_S$ tulajdonságai alapján) a $P \rhd_S \downarrow$ nem igaz.

Feladat 2.3 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q,\ \ R \Rightarrow Q}{P \rhd_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P{::=}\{x = 0\},\ Q{::=}\{x = 1 \vee x = 2\},\ R{::=}\{x = 2\}$$

$$S{::=}\{x := 1\}$$

Ekkor $R \Rightarrow Q$ természetesen teljesül, és a $P \rhd_S Q$ is igaz, hiszen S minden állapotból a Q -ba visz. Viszont a P -ből is a Q -ba jutunk, de R -et kihagyva, tehát nem igaz a feladat állítása.

[1] Azért adunk második ellenpéldát, mert az első már nem lesz jó ellenpélda az $\mapsto_S$ -nél, a 3.2 -ben, viszont a második igen.

Feladat 2.4 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q,\ \ P \Rightarrow R}{R \rhd_S Q}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda:

$$P ::= \{x = 1\},\ Q ::= \{x = 0\},\ R ::= \{x = 1 \vee x = 2\}$$

$$S ::= x := \begin{cases} 0, & \text{ha } \ x = 1 \\ 3, & \text{különben} \end{cases}$$

A feladat első feltétele éppen S első sora miatt igaz, a második feltétel pedig P és R definíciójából következik. Viszont $R \rhd_S Q$ nem teljesül, mivel ha az $x = 2$ -ből indulunk, akkor $x = 3$ -ba jutunk ami nem Q -beli.

Feladat 2.5 *Igaz-e?*

$$\frac{P \Rightarrow Q}{P \rhd_S Q}$$

Megoldás :

A $\rhd_S$ definíciója miatt azt kellene belátni, hogy :

$$\frac{P \Rightarrow Q}{P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)}$$

Viszont $P \Rightarrow Q$ miatt $P \wedge \neg Q = Q \wedge \neg Q = \downarrow$, és az üres halmaz minden halmaznak része.

Feladat 2.6 *Igaz-e?*

$$\frac{\neg P \Rightarrow Q}{P \rhd_S Q}$$

Megoldás :

Igaz. Mivel $\neg P \Rightarrow Q$, ezért $\neg Q \Rightarrow P$, és így $P \vee Q \Rightarrow \uparrow$. $P \rhd_S Q$ -hez azt kéne belátnunk, hogy : $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) = lf(S, \uparrow)$, ami viszont igaz.

Feladat 2.7 *Igaz-e?*

$$\frac{R \rhd_S Q \wedge R}{R stabil_S}$$

Megoldás :

Igaz. A bizonyítás során az alapvető logikai állitásokon kívül felhasználjuk még a $\rhd_S$ definícióját :

$$R \Rightarrow R \wedge (\neg Q \vee \neg R) = (R \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg R) =$$

$$= R \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, R \vee (Q \wedge R)) = lf(S, R).$$

Feladat 2.8 *Igaz-e?*

$$\frac{P \vee Q stabil_S}{P \rhd_S Q}$$

Megoldás :

Igaz. Azt kéne megmutatni, hogy : $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$. Felhasználva a stabilitás definícióját :

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow P \vee Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$$

Ezzel készen is vagyunk.

Feladat 2.9 *Igaz-e?*

$$\frac{P \vee Q stabil_S, \quad Q \Rightarrow R}{P \rhd_S R}$$

Megoldás :

Azt kellene belátni, hogy : $P \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee R)$. Mivel $Q \Rightarrow R$, ezért : $\neg R \Rightarrow \neg Q$. Ezt felhasználva :

$$P \wedge \neg R \Rightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow P \vee Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \Rightarrow lf(S, P \vee R),$$

és ezáltal beláttuk a feladatot.

Feladat 2.10 *($\rhd_S$ tranzitivitása) Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q, \quad Q \rhd_S R}{P \rhd_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz! (Tehát a $\rhd_S$ NEM tranzitív!) Ellenpélda: [2]

$$P ::= \{1\}, \; Q ::= \{2\}, \; R ::= 3$$

$$S ::= \{x := x + 1\}$$

A program a P -t a Q -ba, a Q -t a R -be viszi, viszont P -ből úgy lépünk ki, hogy először a Q -ba jutunk, ami nem része az R -nek.

[2]Ezt az ellenpéldát használhatjuk fel majd arra, hogy az $\mapsto_S$ sem tranzitív 3.7 - ben.

Feladat 2.11 *($\rhd_S$ diszjunktivitása) Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S R,\ \ Q \rhd_S R}{P \vee Q \rhd_S R}$$

Megoldás :

Igaz. Azt kellene belátnunk, hogy

$$(P \vee Q) \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$$

Elemi logikai átalakítással, és felhasználva a $\rhd_S$ definícióját :

$$(P \vee Q) \wedge \neg R = (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \Rightarrow lf(S, P \vee R) \vee lf(S, Q \vee R) \Rightarrow$$

$$lf(S, P \vee R \vee Q \vee R) = lf(S, P \vee Q \vee R).$$

Ezzel beláttuk azt, hogy a $\rhd_S$ tényleg diszjunktív.

Feladat 2.12 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q,\ \ Q \rhd_S R}{P \vee Q \rhd_S R}$$

Megoldás :

A $\rhd_S$ definíciója miatt azt kellene belátni, hogy :

$$\frac{P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q),\ \ Q \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, Q \vee R)}{(P \vee Q) \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)}$$

Logikai átalakításokkal : $(P \wedge Q) \wedge \neg R = (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)$ és azt is tudjuk, hogy ha "beszorzunk" Q -val: $P \wedge \neg R = (P \wedge \neg R \wedge \neg Q) \vee$ $\vee (P \wedge \neg R \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)$ Azt viszont tudjuk, hogy :

$$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, Q \vee R)$$

Ezzel bebizonyítottuk a feladatot.

Feladat 2.13 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q\ ,\ Q \rhd_S P\ ,\ (P \wedge Q) \rhd_S (P \vee Q)}{(P \vee Q) stabil_S}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{1\},\ Q ::= \{1\},\ S ::= x := 0$$

Az első látásra kissé szokatlan ellenpélda lényege az, hogy a $P \rhd_S P$ mindig igaz. Ebben a feladatban az adott P és Q halmazokkal mindhárom feltétel a $\{1\} \rhd_S \{1\}$ feltételbe megy át, ami a $\rhd_S$ tulajdonsága miatt igaz. Viszont $(P \vee Q) stabil_S$ nem áll fent, hiszen S rögtön kivisz az $x = 0$ -ba.

Feladat 2.14 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q,\ \ Q \rhd_S P,\ \ P \wedge Q \Rightarrow \downarrow}{P \vee Q stabil_S}$$

Megoldás :

A $\rhd_S$ definíciója miatt azt kellene belátni, hogy :

$$\frac{P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q),\ \ Q \wedge \neg P \Rightarrow lf(S, Q \vee P),\ \ P \wedge Q \Rightarrow \downarrow}{P \vee Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)}$$

A $P \wedge Q \Rightarrow \downarrow$ miatt tudjuk, hogy : $P \wedge \neg Q = P$ és $Q \wedge \neg P = Q$. Ezt felhasználva : $P \vee Q = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ Ezért pedig :

$$P \vee Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, P \vee Q) \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$$

Feladat 2.15 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q,\ \ Q \rhd_S P,\ \ P \wedge Q stabil_S}{P \vee Q stabil_S}$$

Megoldás :

Igaz. Azt kéne belátnunk, hogy a $P \vee Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$. Felhasználva a $\rhd_S$ definícióját, és felbontva a $P \vee Q$ halmazt, majd $stabil_S$ definíciója miatt :

$$P \vee Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, P \wedge Q) \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, P \wedge Q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, P \vee Q) = lf(S, P \vee Q).$$

Ezzel beláttuk a feladatot.

Feladat 2.16 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_S Q,\ \ K stabil_S}{P \wedge K \rhd_S Q \wedge K}$$

Megoldás :

A $\rhd_S$ definíciója miatt azt kellene belátni, hogy :

$$\frac{P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q),\ \ K \Rightarrow lf(S, K)}{(P \wedge K) \wedge (\neg Q \vee \neg K) \Rightarrow lf(S, (P \wedge K) \vee (Q \wedge K)}$$

Logikai átalakításokkal, és felhasználva a megadott tulajdonságokat : $(P \wedge K) \wedge (\neg Q \vee \neg K) = (P \wedge K \wedge \neg Q) \vee (P \wedge K \wedge \neg K) = (P \wedge K \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \wedge lf(S, K) \Rightarrow lf(S, (P \vee Q) \wedge K) \Rightarrow lf(S, (P \wedge K) \vee (Q \wedge K))$

Ezzel beláttuk a feladat állítását.

Feladat 2.17 *Igaz-e?*

$$\frac{\neg P \rhd_S (Q \vee R),\ \ \neg R \rhd_S (P \vee Q)}{\neg Q\ \rhd_S\ (P \vee R)}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{0\},\ Q ::= \{1\},\ R ::= \{2\}$$

Legyen most

$$S ::= x := \begin{cases} 1, & \text{ha } \ x = 0 \vee x = 1 \\ 2, & \text{ha } \ x = 2 \end{cases}$$

Ekkor mindkét feltétel teljesül, hiszen : $\{1,2\} \rhd_S \{1,2\}$ és $\{0,1\} \rhd_S \{0,1\}$. Viszont $\neg Q\ \rhd_S\ (P \vee R)$ nem áll fent, ugyanis: $\neg Q = \{0,2\}$ és ha az $x = 0$ -ból indulunk, akkor az $x = 1$ állapotba jutunk, ami már kilépett $\neg Q$ -ból, de $P \vee R$ még nem áll fent.

Feladat 2.18 *Igaz-e?*

$$\frac{P \Rightarrow Q,\ \ (Q \wedge \neg Z) \rhd_S R,\ \ R \Rightarrow Z}{(Q \wedge \neg P) \rhd_S (Z \wedge P)}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{1\},\ Q ::= \{1,2,3\},\ R ::= \{4,6\},$$

$$Z ::= \{4,5,6,7\},\ \ S ::= \{x := x + 1\}$$

Viszont ha felírjuk a $(Q \wedge \neg P) \rhd_S (Z \wedge P)$ -t : $\{2,3\} \rhd_S \downarrow$ kellene, de ez viszont nem igaz.

Feladat 2.19 *Igaz-e?*

$$\frac{\neg R \rhd_S (P \wedge R),\ \ Q \rhd_S \neg R,\ \ R \Rightarrow Z}{Z \rhd_S (Q \vee \neg R)}$$

Megoldás :

Igaz. Azt kellene megmutatnunk, hogy a

$$Z \wedge \neg Q \wedge R \Rightarrow lf(S, Z \vee Q \vee \neg R)$$

Viszont azt tudjuk, hogy $R \Rightarrow Z$, és így $Z \vee \neg R = \uparrow$. Ebből viszont :

$$Z \wedge \neg Q \wedge R \Rightarrow lf(S, Z \vee Q \vee \neg R) = lf(S, \uparrow) = \uparrow,$$

és így beláttuk a feladatot. [3]

[3] A bizonyításnak az az érdekesége, hogy csak a harmadik feltételt használtuk fel, az első kettő nem szükséges.

Feladat 2.20 *Igaz-e?*
$$\frac{P \triangleright_S Q,\ \ Q \triangleright_S P}{(P \vee Q) \triangleright_S (P \wedge Q)}$$

Megoldás :

Igaz. Logikai átalakításokkal :

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) = (P \vee Q) \wedge \neg P \vee (P \vee Q) \wedge \neg Q =$$

$$= (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) =$$

$$= \downarrow \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee \downarrow = (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$$

A feladat feltételei miatt : $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$ és $Q \wedge \neg P \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$, ezért : $(Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \vee lf(S, P \vee Q) = lf(S, P \vee Q)$, amivel beláttuk a feladatot.

Feladat 2.21 *Igaz-e?*
$$\frac{P \triangleright_S Q,\ \ Q \triangleright_S P}{P \triangleright_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. Tudjuk, hogy $Q \Rightarrow Q \vee R$, és a gyengítési tételt (ld. 2.1) felhasználva : $P \triangleright_S Q \vee R$. Ezzel beláttuk a feladatot. Vegyük észre, hogy csak az első feltételt használtuk fel, és a második feltétel nem szükséges a beláláshoz.

Feladat 2.22 *Igaz-e?*
$$\frac{(P \vee Q) \triangleright_S Q,\ \ Q \triangleright_S R}{P \triangleright_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. Azt kéne bebizonyítani, hogy :

$$P \wedge \neg(Q \vee R) \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$$

Azt tudjuk az els feltételbl, hogy $(P \vee Q) \wedge \neg Q = (P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge \neg Q) = (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$, és emiatt :

$$P \wedge \neg(Q \vee R) = P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(S, P \vee Q) \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$$

Tehát beláttuk a feladatot, anélkül, hogy a $Q \triangleright_S R$ feltételt fel kellett volna használnunk.

Feladat 2.23 *Igaz-e?*
$\underline{(P \vee Q) \rhd_S R, \;\; Q \rhd_S R}$
$P \rhd_S (Q \vee R)$

Megoldás :

Igaz. Azt kellene belátni, hogy :

$$P \wedge \neg(Q \vee R) \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$$

Az első feltételből kiindulva, és kibővítve $Q \wedge \neg R$ -rel : [4]

$$P \wedge \neg(Q \vee R) \Rightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) =$$

$$= ((P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \neg R) =$$

$$= (P \vee Q) \wedge (Q \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R) \wedge (\neg Q \wedge \neg R) \wedge (\neg R \vee \neg R) =$$

$$= (P \vee Q) \wedge (\neg R \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q)) \Rightarrow (P \vee Q) \wedge \neg R$$

Viszont az első feltételt a definíció szerint felírva éppen azt kapjuk, hogy:

$$(P \vee Q) \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$$

Összegezve tehát:

$$P \wedge \neg(Q \vee R) \Rightarrow (P \vee Q) \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$$

Ezáltal beláttuk a feladatot.Vegyük észre, hogy itt is csak az első feltételt használtuk fel, a második feltétel nem szükséges a belátáshoz.

Feladat 2.24 *Igaz-e?*
$\underline{P \rhd_S (Q \vee R)}$
$(P \wedge \neg Q) \rhd_S (Q \vee R)$

Megoldás :

Igaz. Tudjuk, hogy

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg(Q \vee R) = P \wedge \neg Q \wedge \neg Q \neg R == P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

A $\rhd_S$ definíciója miatt azt kéne megmutatni, hogy :
$\underline{P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)}$
$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R)$

Ez pedig már tényleg triviális.

[4]Felrajzolva a $P \wedge \neg(Q \vee R)$ és a $(P \vee Q) \wedge \neg R$ halmazokat, *bárki* rájöhet, hogy miért pont ezzel a halmazzal bővítünk.

Chapter 3

Haladási tulajdonságok I.

Az $\mapsto_S$ tulajdonságai :

1. $\downarrow \mapsto_S P$
2. $P \mapsto_S \uparrow$
3. $P \mapsto_S P$

Feladat 3.1 *(Gyengítési tétel) Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q, \quad Q \Rightarrow R}{P \mapsto_S R}$$

Megoldás :

Minden $\mapsto_S$ -t úgy bizonyítunk, hogy belátjuk a $\rhd_S$ -t, és mutatunk egy s utasítást, ami eleget tesz a definícióban mondottaknak.

a, $\rhd_S$ igaz, ugyanis arra már beláttuk a gyengítési tételt.

b, Tudjuk, hogy $\exists s \in S : P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s, Q)$ és $Q \Rightarrow R$. Ezért :

$$P \wedge \neg R \Rightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s, Q) \Rightarrow lf(s, R)$$

Feladat 3.2 *(Erősítési tétel) Igaz-e?*

$$\frac{P \Rightarrow Q, \quad Q \mapsto_S R}{P \mapsto_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. Az ellenpélda a 2.2 második ellenpéldája :

$$Q ::= \uparrow \quad R ::= \downarrow$$

Ekkor $P \Rightarrow\uparrow$ és $\uparrow \mapsto_S R$ fennállnak, viszont tudjuk, hogy (a $\rhd_S$ tulajdonságai alapján) már a $P \rhd_S \downarrow$ sem igaz, tehát a $P \mapsto_S R$ sem.

Feladat 3.3 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q, \quad A \mapsto_S B}{P \wedge A \mapsto_S Q \wedge B}$$

Megoldás :

Feladat 3.4 *Igaz-e?*

$$\frac{P \Rightarrow Q}{P \mapsto_S Q}$$

Megoldás :

Igaz.Két dolgot kéne belátni :

1. $P \rhd_S Q$: $P \wedge \neg Q =\downarrow \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$
2. $\exists s \in S$: $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s, Q)$: mivel $P \wedge \neg Q =\downarrow$, ezért $\forall s \in S$: $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s, Q)$

Feladat 3.5 *Igaz-e?*

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mapsto_S Q}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda: Azt már 2.6 -ben beláttuk, hogy a $\rhd_S$ -re igaz az állítás, ezért most olyan példát adunk, amire a $\exists$ ág nem teljesül.

$$S ::= \{x := 1\} \quad Q ::= (x = 0)$$

Feladat 3.6 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S \downarrow}{P =\downarrow}$$

Megoldás :

Az $\mapsto_S$ definíciójából tudjuk, hogy $\exists s \in S$: $P \wedge \uparrow \Rightarrow lf(s, \downarrow)$ Mivel $lf(s, \downarrow) =\downarrow$, ezért $P =\downarrow$.

Feladat 3.7 *($\mapsto_S$ tranzitivitása) Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q, \quad Q \mapsto_S R}{P \mapsto_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz! (Tehát az $\mapsto_S$ NEM tranzitív!) Már $\rhd_S$ -re sem teljesült az állítás, és hiába erősítettünk a feltételeken (ugyanis $\rhd_S$ helyett $\mapsto_S$ -t írtunk), a 2.10 -ban használt ellenpélda most is jó lesz.

Feladat 3.8 *($\mapsto_S$ diszjunktivitása) Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S R,\ \ Q \mapsto_S R}{P \vee Q \mapsto_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. (Tehát az $\mapsto_S$ NEM diszjunktív!) Ellenpélda :

$$P ::= \{1\},\ Q ::= \{3\},\ R ::= \{2\}$$

$$S ::= x := \begin{cases} x+1, & \text{ha } x = 1 \\ x-1, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

Az ellenpélda azon alapszik, hogy a $P \vee Q$ -ból indulva a program két utasítás közül is választhat. Mindez formálisan leírva [1] : A $\rhd_S$ még teljesül, de

$$\exists s \in S : \{1,3\} \Rightarrow lf(x := x+1 | x = 1, \{2\}) = \{x = 1 \rightarrow x+1 \in \{2\}\} =$$
$$= \{1,2,3\}$$
$$\exists s \in S : \{1,3\} \Rightarrow lf(x := x-1 | x = 3, \{2\}) = \{x = 1 \rightarrow x-1 \in \{2\}\}$$
$$= \{1,2,3\}$$

ez pedig ellentmondás.

Feladat 3.9 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q,\ \ Q \mapsto_S R}{P \vee Q \mapsto_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{1\},\ Q ::= \{2\},\ R ::= \{3\}$$

$$S ::= x := \begin{cases} 2, & \text{ha } x = 1\ (s_1) \\ 3, & \text{ha } x = 2\ (s_2) \end{cases}$$

Az elenpélda lényege hasonló a 3.8 beli ellenpéldáéval. A $\rhd_S$ még teljesül, de

$$\exists s \in S : \{1,2\} \Rightarrow lf(s_1, \{3\}) = \{2\} \{1,2\} \Rightarrow lf(s_2, \{3\}) = \{2,3\}$$

ami viszont ellentmondás.

[1] Ahogyan a ZH-ra kell!

Feladat 3.10 *Igaz-e?*
$$\frac{P \mapsto_S Q}{(P \vee R) \mapsto_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{1\},\ Q ::= \{2\},\ R ::= \{3\}$$

$$S ::= x := \begin{cases} 2, & \text{ha } x = 1 \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ 5, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

Az ellenpélda kielégíti a feladat feltételét, hiszen a program első utasítása a P-bl Q -ba visz. Viszont az $x = 3 \in P \vee R$ -ből indulva az $x = 5$ -be jutunk, ami se Q-nak, se R-nek nem eleme.

Feladat 3.11 *Igaz-e?*
$$\frac{(P \vee Q) \mapsto_S R}{P \mapsto_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. A feladat belátásához két dolog kell :

1. Azt, hogy $P \rhd_S (Q \vee R)$ igaz, már beláttuk 2.23 -ban. [2]
2. $(P \vee Q) \mapsto_S R$ miatt tudjuk, hogy $\exists s_1 \in S : (P \vee Q) \wedge \neg R \to lf(s_1, R)$. Azt látjuk be, hogy ez az s_1 jó lesz a $P \mapsto_S (Q \vee R)$ $\exists$ ágának a bizonyításához. Ugyanis :

$$P \wedge \neg(Q \wedge R) = P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow (P \vee Q) \wedge \neg R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow lf(s_1, R) \Rightarrow lf(s_1, Q \vee R)$$

Feladat 3.12 *Igaz-e?*
$$\frac{(P \vee Q) \mapsto_S Q\ ,\ Q \mapsto_S R}{P \mapsto_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. Az $\mapsto_S$ -hez két dolog kell :

1. $P \rhd_S (Q \vee R)$ igaz, hiszen a 2.22 -ben beláttuk ezt, ráadásul, ott $\mapsto_S$ helyett csak $\rhd_S$ volt feltéve.

[2] Abban a feladatban fel van még téve $Q \rhd_S R$ is , de mi csak a $(P \vee Q) \rhd_S R$ -t használtuk akkor!

2. Az kellene még, hogy $\exists s \in S : P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow lf(s, P \vee Q \vee R)$. A második feltétel viszont garantál egy s_1 -et, melyre : $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_1, Q)$. Ez az s_1 pont jó lesz s -nek, ugyanis :

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_1, Q) \Rightarrow lf(s_1, P \vee Q \vee R).$$

Ezzel a $\exists$ ágat is beláttuk. [3]

Feladat 3.13 *Igaz-e?*
$$\frac{(P \vee Q) \mapsto_S R}{(P \vee R) \mapsto_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. $(P \vee R) \mapsto_S (Q \vee R)$teljesüléséhez két dolog kell :

1. $(P \vee R) \wedge \neg R \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R$. Logikai átalakításokkal :

$$(P \vee R) \wedge \neg R \wedge \neg Q \Rightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \Rightarrow lf(S, P \vee Q \vee R).$$

2. Az kell, hogy : $\exists s \in S : P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow lf(s, Q \vee R)$. Viszont a feltételből tudjuk, hogy

$$\exists s_1 \in S : (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \Rightarrow lf(s_1, R).$$

Ez a s_1 jó lesz S -nek, mivel :

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(s_1, R) \Rightarrow lf(s_1, Q \vee R)$$

Feladat 3.14 *Igaz-e?*
$$\frac{P \mapsto_S (Q \vee R)}{(P \wedge \neg Q) \mapsto_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. A $\mapsto_S$ definíciója miatt két dolgot kell belátni :

1. $(P \wedge \neg Q) \rhd_S (Q \vee R)$. ezt már beláttuk a 2.24 -ban tehát igaz.

[3] 2.22 -ben megjegyeztük, hogy a $Q \rhd_S R$ feltétel nem szükséges a bizonyításhoz. Vegyük észre, hogy most már szükség volt erre a feltételre is, ami nagyon jól mutatja, hogy mennyivel erősebb kritérium a $\mapsto_S$.

2. Az kéne még, hogy $\exists s \in S : P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow lf(s, Q \vee R)$. Viszont a feltételből tudjuk, hogy$\exists s_2 \in S : P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow lf(s_2, Q \vee R)$. Ez az s_2 pont jó lesz s -nek.

Feladat 3.15 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q, \quad K stabil_S}{P \wedge K \mapsto_S Q \wedge K}$$

Megoldás :

Igaz.

a, A $\rhd_S$ -re már beláttuk az állítást a 2.16 -ben.

b, Azt kéne még bebizonyítani, hogy :

$$\exists s \in S : (P \wedge K) \wedge (\neg Q \vee \neg K) \Rightarrow \; lf(s, Q \wedge K)$$

Viszont $K stabil_S$ miatt : $K \Rightarrow lf(S, K)$, és $P \mapsto_S Q$ miatt : $\exists s_1 \in S : P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_1, Q)$. Ezért ez az s_1 jó lesz s -nek. $(P \wedge K) \wedge (\neg Q \vee \neg K) = P \wedge \neg Q \wedge K \Rightarrow lf(s, Q) \wedge lf(s, K) \Rightarrow lf(s, Q \wedge K)$

Feladat 3.16 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S \neg P, \quad Q \mapsto_S \neg Q, \quad R \mapsto_S \neg R}{(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \mapsto_S \neg((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R))}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{1, 2, 3\}, \; Q ::= \{2, 4, 5\}, \; R ::= \{1, 4, 6\}$$

$$S ::= x := \begin{cases} 2, & \text{ha } \; x = 1 \\ 4, & \text{ha } \; x = 2 \\ 1, & \text{ha } \; x = 4 \end{cases}$$

Az ellenpéldának az a lényeges tulajdonsága, hogy páronként tekintve a metszethalamzokat, ezek egymásba visznek, és a három halmaz metszete viszont üres. A feltételek ezért teljesülnek, de :

$$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \mapsto_S \neg((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)) \Leftrightarrow$$

$$\{1, 2, 4\} \mapsto_S \{3, 5, 6\}$$

nem igaz, hiszen $\{1, 2, 4\} stabil_S$

Chapter 4

Haladási tulajdonságok II.

Az $\hookrightarrow_S$ tulajdonságai :

1. $\downarrow \hookrightarrow_S P$
2. $P \hookrightarrow_S \uparrow$
3. $P \hookrightarrow_S P$

Feladat 4.1 *Igaz-e?*
$$\frac{P \Rightarrow Q}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Már $\mapsto_S$ -re is igaz volt (ld 3.4), tehát ez az állítás is igaz.

Feladat 4.2 *Igaz-e?*
$$\frac{P \hookrightarrow_S Q \ , \ Q \Rightarrow R}{P \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Igaz. A 4.1 -ben mondottakat alkalmazva $Q \Rightarrow R$ -re, tudjuk, hogy $Q \hookrightarrow_S R$ igaz lesz. Ezek után a tranzitivitás miatt : $(P \hookrightarrow_S Q) \wedge (Q \hookrightarrow_S R) \Rightarrow P \hookrightarrow_S R$.

Feladat 4.3 *Igaz-e?*
$$\frac{P \Rightarrow Q \ , \ Q \hookrightarrow_S R}{P \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Igaz. Itt is 4.1 -ben mondottakat alkalmazzuk, de most $P \Rightarrow Q$ -re,és így $P \hookrightarrow_S Q$ igaz lesz. Ezek után a tranzitivitás miatt : $(P \hookrightarrow_S Q) \wedge (Q \hookrightarrow_S R) \Rightarrow P \hookrightarrow_S R$.

Feladat 4.4 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_S \downarrow}{P = \downarrow}$$

Megoldás :

Igaz. A bizonyítás strukturális indukcióval történik.

1. Először be kell látni, hogy $\mapsto_S$ -re is igaz az állítás: $P \mapsto_S \downarrow \Rightarrow (P = \downarrow)$. Ezt pedig már beláttuk 3.6 -ban.

2. *Indukciós feltétel* A második lépésben feltesszük, hogy ha $A \hookrightarrow_S \downarrow$ maximum n lépéses, akkor $A = \downarrow$.

3. Tegyük fel, hogy $P \hookrightarrow_S \downarrow$ úgy állt elő, hogy : $P \hookrightarrow_S A$ $A \hookrightarrow_S \downarrow$. Ekkor az indukciós feltevés miatt: $A = \downarrow$, ezért $P \hookrightarrow_S \downarrow$, és erre újra alkalmazva az indukciós feltételt: $P = \downarrow$.

4. Tegyük fel, hogy $P \hookrightarrow_S \downarrow$ úgy állt elő, hogy : $A_i \hookrightarrow_S \downarrow$ (max. n lépéses) $\bigvee A_i = P$. Alkalmazva az indukciós feltételt, megkapjuk, hogy : $\forall i : A_i = \downarrow \Rightarrow \bigvee A_i = \downarrow \Rightarrow P = \downarrow$, amivel bebizonyítottuk a feladatot.

Feladat 4.5 *Lássuk be a PSP-tételt:*

$$\frac{p \hookrightarrow_S q, \quad r \rhd_S b}{p \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b}$$

Megoldás :

Igaz. A bizonyítás strukturális indukcióval történik.

1. Először belátjuk, hogy :

   $$\frac{p \mapsto_S q, \quad r \rhd_S b}{p \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b}$$

   A megadott feltételeket átirva :

   $$p \wedge \neg q \Rightarrow lf(S, p \vee q),$$

   $$r \wedge \neg b \Rightarrow lf(S, r \vee b)$$

   ezeket kunjunkcióval összeragasztva :

   $$p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg b \Rightarrow lf(S, (p \vee q) \wedge (r \vee b)) \Rightarrow lf(S, (p \vee q) \wedge r \vee (p \vee q \wedge b))$$

Ahhoz, hogy belássuk $p \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$ -t, bebizonyítjuk, hogy : $p \wedge r \mapsto_S (q \wedge r) \vee b$. Ezt két lépésben tesszük, először megmutatjuk, hogy $\rhd_S$ igaz :

$$p \wedge r \wedge \neg((q \wedge r) \vee b) \Rightarrow lf(S, (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee b)$$

Elemi logikai átalakításokkal :

$$p \wedge r \wedge \neg((q \wedge r) \vee b) = (p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r) \wedge \neg b) =$$

$$= p \wedge r \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge \neg b) = p \wedge r \wedge \neg q \wedge \neg b)$$

Tehát :

$$p \wedge r \wedge \neg((q \wedge r) \vee b) = p \wedge r \wedge \neg q \wedge \neg b) \Rightarrow lf(S, (p \vee q) \wedge r \vee (p \vee q \wedge b)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(S, ((p \vee q) \wedge r) \vee b) = lf(S, (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee b)$$

Ezzel beláttuk a $\rhd_S$ -t. Második lépésként pedig következik a $\exists$ ág:

$$\exists s_1 : p \wedge \neg q \Rightarrow lf(s_1, q)$$

$$p \wedge r \wedge \neg q \wedge \neg b \Rightarrow lf(s_1, q \wedge (r \vee b)) \Rightarrow lf(s_1, (q \wedge r) \vee b)$$

2. *Indukciós feltétel* Azt tesszük fel, hogy ha $A \hookrightarrow_S q$ maximum n lépéses, és $b \rhd_S r$ akkor $A \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$.

3. Tegyük fel, hogy $p \hookrightarrow_S q$ úgy állt elő, hogy $p \hookrightarrow_S A$ és $A \hookrightarrow_S q$. Ekkor mindkét $\hookrightarrow_S$ -ra lehet alkalmazni az indukciós feltételt, hiszen mindkettő maximum n lépésés, így :

$$p \wedge r \hookrightarrow_S (A \wedge r) \vee b, \; A \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b.$$

A $\hookrightarrow_S$ tulajdonságai miatt $b \hookrightarrow_S b$,és $b \Rightarrow (q \wedge r) \vee b$. A Gyengítési tétel alapján (ld. 4.2) $b \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$. Ebből és $A \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$ -ből a $\hookrightarrow_S$ diszjunktív szabályával azt kapjuk, hogy : $(A \wedge r) \vee b \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$. Erre és $p \wedge r \hookrightarrow_S (A \wedge r) \vee b$ -re pedig $\hookrightarrow_S$ tranzitivitását használva $p \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$ -t kapjuk, ami éppen a bizonyítandó állítás.

4. Tegyük fel, hogy $p \hookrightarrow_S q$ úgy állt elő, hogy : $A_i \hookrightarrow_S q$(max. n lépésben) $\bigvee A_i = p$. Viszont erre alkalmazva az indukciós feltételt, azt kapjuk, hogy : $(\bigvee A_i) \wedge r \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$, hiszen $\forall i \in \mathcal{N} : \mathcal{A}_\rangle \wedge \nabla \hookrightarrow_S (\amalg \wedge \nabla) \vee \lfloor$ és ezekre a diszjunktív szabályt alkalmazva : $(\bigvee A_i \wedge r) \hookrightarrow_S (q \wedge r) \vee b$, de azt is tudjuk, hogy $(\bigvee A_i \wedge r) = (\bigvee A_i) \wedge r$.

Feladat 4.6 *Igaz-e?*
$$\frac{A \rhd_S B,\ \ A \hookrightarrow_S B}{A \mapsto_S B}$$

Feladat 4.7 *Igaz-e?*
$$\frac{P \hookrightarrow_S Q,\ \ P\ stabil_S}{P \mapsto_S Q}$$

Feladat 4.8 *Igaz-e?*
$P \hookrightarrow_S Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S Q$

Megoldás :

Igaz. Két dolgot kell belátnunk :

1. $\Rightarrow$ irány :

   $$\frac{P \hookrightarrow_S Q}{P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S Q}$$

   Ha figyelembe vesszük azt, hogy $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$, így 4.1 -ben belátottak szerint $P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S P$. Felhasználva a $\hookrightarrow_S$ tranzitivitását :

   $$P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S P \hookrightarrow_S Q$$

   , amiből már következik a bizonzítandó állítás.

2. $\Leftarrow$ irány :

   $$\frac{P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S Q}{P \hookrightarrow_S Q}$$

   Ennek belátásához ismét fel fogjuk használni a 4.1 -t, és a $\hookrightarrow_S$ disztributivitását is. Ugyanis ha megmutatjuk $P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S Q$ -t és $P \wedge Q \hookrightarrow_S Q$ -t, akkor készen vagyunk. $P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S Q$ igaz, hiszen ezt mondja ki a feltétel, $P \wedge Q \hookrightarrow_S Q$ pedig amiatt igaz, hogy $P \wedge Q \Rightarrow Q$

Feladat 4.9 *Igaz-e?*
$$\frac{A \hookrightarrow_S B,\ \ B \hookrightarrow_S A,\ \ \neg(A \vee B)\ stabil_S}{(A \vee B)\ stabil_S}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$A ::= \{1\},\ B ::= \{1\},\ S ::= x := 0$$

Az ellenpélda lényege az, hogy a $A \hookrightarrow_S A$ mindig igaz. Ebben a feladatban az adott A és B halmazokkal mindhárom feltétel a $\{1\} \hookrightarrow_S \{1\}$ feltételbe megy át, ami a $\hookrightarrow_S$ tulajdonsága miatt igaz. Viszont $(A \vee B) stabil_S$ nem áll fent, hiszen S rögtön kivisz az $x = 0$ -ba.

Feladat 4.10 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q,\ \ Q \mapsto_S P,\ \ (P \vee Q) \mapsto_S P}{(P \vee Q) \hookrightarrow_S (P \wedge Q)}$$

Megoldás :

Nem igaz.Ellenpélda:

$$P ::= (x \leq 0),\ \ Q ::= (x \geq 0)$$

és

$$S ::= \{x := -x\}$$

Ekkor teljesülnek a feladat feltételei, hiszen a pozitív és negatív számok ellentettjei éppen a másik halmazban vannak, így P -ből biztosan átjutunk Q -ba, és fordítva, viszont a $P \vee Q$ -ból indulva csak akkor jutok az $P \wedge Q = (x = 0)$ -ba, ha onnan indultam, de bármely más $x \neq 0$ számra x sosem lesz 0.

Feladat 4.11 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_S \neg P,\ \ P \vee Q\ stabil_S,\ \ ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)) \mapsto_S (P \vee Q)}{(P \wedge \neg Q) \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Igaz. A bizonyítás alapötlete az, hogy a $P \hookrightarrow_S \neg P$, $P \vee Q \rhd_S \downarrow$ feltételekre a $p = P, q = \neg P, r = P \vee Q, b = \downarrow$ szereposztással felírjuk a 4.5 -ben belátott PSP -tételt. Ebből azt kapjuk, hogy :

$$P \wedge (P \vee Q) \hookrightarrow_S \neg P \wedge (P \vee Q)$$

$$(P \wedge P) \vee (P \wedge Q) \hookrightarrow_S (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$P \vee (P \wedge Q) \hookrightarrow_S Q \wedge \neg P$$

$$P \hookrightarrow_S Q \wedge \neg P$$

Tudjuk, hogy

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow P,\ \ Q \wedge \neg P \Rightarrow Q,$$

ezért a 4.1 miatt

$$P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S P,\ \ Q \wedge \neg P \hookrightarrow_S Q,$$

A kapott eredményekre a tranzitivitást alkalmazva:

$$P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S P \hookrightarrow_S Q \wedge \neg P \hookrightarrow_S Q,$$

ezzel beláttuk a feladatot.

Feladat 4.12 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_S Q,\ \ Q \mapsto_S \neg P,\ \ P \rhd_S B}{P \hookrightarrow_S B}$$

Megoldás :

Igaz. Mivel $P \mapsto_S Q$ ezért $P \hookrightarrow_S Q$ is igaz, és ugyanígy $Q \hookrightarrow_S \neg P$ is teljesül. Alkalmazzuk a 4.5 -ben bizonyított PSP -tételt a $(Q \hookrightarrow_S \neg P\ ,\ P \rhd_S B)$ -re. Ebből az jön ki, hogy $(Q \wedge P) \hookrightarrow_S B$. Ezt diszjunkcióval összerakva a $B \hookrightarrow_S B$ tulajdonsággal, azt kapjuk, hogy : $(Q \wedge P) \vee B \hookrightarrow_S B$. Alkalmazzuk még egyszer a PSP - tételt, de most $(P \hookrightarrow_S Q\ ,\ P \rhd_S B)$ -re. Ebből azt kapjuk, hogy $P \hookrightarrow_S (Q \wedge P) \vee B$. A kapott eredményeket felírva:

$$P \hookrightarrow_S (Q \wedge P) \vee B \hookrightarrow_S B$$

és a $\hookrightarrow_S$ tranzitivitásából azt kapjuk, hogy $P \hookrightarrow_S B$. Ezzel beláttuk a feladatot.

Feladat 4.13 *Igaz-e?*

$$\frac{A \mapsto_S (B \vee C),\ \ B \mapsto_S (B \wedge C \wedge \neg A),\ \ C \mapsto_S (B \wedge C),\ \ (B \wedge C) \Rightarrow D}{A \hookrightarrow_S D}$$

Megoldás :

Igaz. Bizonyítás :

A $\hookrightarrow_S$ tranzitivitása miatt elég belátni, hogy $A \hookrightarrow_S B \vee C$ és $B \vee C \hookrightarrow_S D$. $A \hookrightarrow_S B \vee C$igaz, hiszen az első feltétel miatt már a $\mapsto_S$ is teljesült, ezért a $\hookrightarrow_S$ is teljesülni fog. $B \vee C \hookrightarrow_S D$ belátásához a disztributivitás miatt elég megmutatni, hogy $B \hookrightarrow_S D$ és $C \hookrightarrow_S D$. Vegyük észre, hogy

$$B \mapsto_S (B \wedge C \wedge \neg A) \Rightarrow (B \wedge C) \Rightarrow D,$$

és emiatt a 3.1 -ben belátott gyengítési tétel alapján: $B \mapsto_S D$. Az előbbiek a harmadik feltétel miatt elmondhatók C -re is, így pedig $C \mapsto_S D$.

Feladat 4.14 *Igaz-e?*

$$\frac{(P \wedge B) \hookrightarrow_S Q,\ \ (P \wedge \neg B) \hookrightarrow_S ((P \wedge B) \vee Q)}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Igaz.A $\hookrightarrow_S$ disztributivitása miatt elég belátni, hogy

1. $(P \wedge B) \hookrightarrow_S Q$,ez viszont szerepelt a feltételek között
2. $(P \wedge \neg B) \hookrightarrow_S Q$. Ennek belátása úgy történik, hogy $(P \wedge B) \hookrightarrow_S Q$ és $Q \hookrightarrow_S Q$ miatt $(P \wedge B) \vee Q \hookrightarrow_S Q$,hiszen a disztributivitás még mindig igaz, ebből és a második feltételből pedig a tranzitivitás miatt következik $(P \wedge \neg B) \hookrightarrow_S Q$.

Feladat 4.15 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_S (Q \vee B),\ \ B \hookrightarrow_S R}{P \hookrightarrow_S (Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz.A $\hookrightarrow_S$ tranzitivitása miatt azt kéne belátni, hogy : $P \hookrightarrow_S (Q \vee B), (Q \vee B) \hookrightarrow_S (Q \vee R)$. Az első követelmény pontosan az első feltétel, míg a második követelményt úgy lehet megmutatni, hogy belátjuk $Q \hookrightarrow_S (Q \vee R), B \hookrightarrow_S (Q \vee R)$ -t, és felhasználjuk a $\hookrightarrow_S$ diszjunktivitását. Tudjuk, hogy : $Q \Rightarrow Q \vee R$, ezért 4.1 miatt $Q \hookrightarrow_S (Q \vee R)$. Másrészről viszont a 4.2-ben megmutatott tulajdonság miatt : $B \hookrightarrow_S R \Rightarrow (Q \vee R) \rightarrow B \hookrightarrow_S (Q \vee R)$. Ezzel pedig beláttuk a feladat állítását.

Feladat 4.16 *Igaz-e?*

$$\frac{(P \hookrightarrow_S Q,\ \ K stabil_S}{(P \wedge K) \hookrightarrow_S (Q \wedge K)}$$

Megoldás :

Igaz. A feladatot be lehetne bizonyítani strukturális indukcióval is, de az alábbi megoldás valamivel egyszerűbbnek tűnik. [1] Mivel $(K stabil_S$, ezért $(K \rhd_S \downarrow$. Most pedig írjuk fel a 4.5 -ben belátott PSP -tételt $p = P, q = Q, r = K, b = \downarrow$ szereposztással. Azt kapjuk, hogy $(P \wedge K) \hookrightarrow_S (Q \wedge K) \vee \downarrow = (Q \wedge K)$.

Feladat 4.17 *Igaz-e?*

$$\frac{A \rhd_S B,\ \ B \rhd_S C,\ \ A \hookrightarrow_S C}{A \hookrightarrow_S B}$$

Megoldás :

Nem igaz.Ellenpélda:

$$A ::= (x = 0),\ B ::= (x \geq 5),\ C ::= (-6 \leq x \leq 6)$$

és

$$S ::= \{x := x\}$$

[1] Aki ezt nem hiszi, az járjon utána, vagyis oldja meg strukturális indukcióval.

Az ellenpéldának az a lényeges tulajdonsága, hogy $A \Rightarrow C$, így $A \hookrightarrow_S C$ fennáll, és a stabilitási feltételek is teljesülnek, hiszen S minden utasítása helybenhagyja a halmazokat.

Feladat 4.18 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_S Q, \ \ (R \wedge \neg Q)\ stabil_S}{(P \wedge R) \Rightarrow Q}$$

Megoldás :

Igaz. Kétfajta megoldást adunk.

1. $(R \wedge \neg Q)\ stabil_S$ -t átírva a definíció alapján: $(R \wedge \neg Q) \rhd_S \downarrow$. Használjuk a PSP -tételt (ld. 4.5) az alábbi megfeleltetéssel :

   $$p = P, q = Q, r = R \wedge \neg Q, b = \downarrow .$$

   Ebből azt kapjuk, hogy :

   $$P \wedge R \wedge \neg Q \hookrightarrow_S (Q \wedge Q \wedge \neg Q) \vee \downarrow = \downarrow$$

   Innen viszont 4.4 miatt $P \wedge R \wedge \neg Q = \downarrow$ következik, ami ekvivalens $(P \wedge R) \Rightarrow Q$ -val.

2. Indirekt úton okoskodunk. Tegyük fel, hogy $\exists x \in P \wedge R : x \notin Q$. Mivel $x \in P$, ezért x -ből indulva elkerülhetetlenül Q -ba jutunk. Viszont $x \in (R \wedge \neg Q)\ stabil_S$, és ezek szerint végig $\neg Q$ -ban kell maradnunk, ami viszont ellentmondás.

Feladat 4.19 *Igaz-e?*

$$\frac{(P \wedge Q) \mapsto_S R}{P \hookrightarrow_S (\neg Q \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. Két dolgot látunk be, és azokra alkalmazzuk majd a $\hookrightarrow_S$ disztributivitását :

1. $P \wedge Q \hookrightarrow_S (\neg Q \vee R)$. Ez amiatt igaz, mert a feltételre alkalmazható az $\mapsto_S$ -re vonatkozó gyengítési tétel (ld. 3.1) , hiszen $R \Rightarrow R \vee \neg Q$.

2. $P \wedge \neg Q \hookrightarrow_S (\neg Q \vee R)$. Ez pedig azért igaz, mert már a $P \wedge \neg Q \mapsto_S (\neg Q \vee R)$ is az. Ugyanis : $P \wedge \neg Q \wedge Q \wedge \neg R = \downarrow$, és így a $\rhd_S$ és a $\exists$ ág is teljesülni fog.

Feladat 4.20 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_S Q, \ \ (P \wedge R) \rhd_S (Q \wedge R)}{(P \wedge R) \hookrightarrow_S (Q \wedge R)}$$

Megoldás :

Igaz.A bizonyításhoz felhasználjuk a PSP-tételt , melyet 4.5 -ben láttunk be. Legyen a PSP tételben szereplő p, q azonos a jelenlegi feladatban lévő P, Q -val, és b::=$(Q \wedge R), r$::=$(R \wedge P)$ Ha ezzel a p, q, b, r -rel felírjuk a PSP-tételt, akkor a bizonyítandó feladatot kapjuk.

Feladat 4.21 *Igaz-e?*

$$\frac{A_0 \mapsto_S C,\ \forall n \in \mathcal{N} : A_{n+1} \mapsto_S A_n}{(\bigvee A_n) \hookrightarrow_S C}$$

Megoldás :

Igaz. Először belátjuk, hogy : $\forall n \in \mathcal{N} : A_n \hookrightarrow_S C$. Ez amiatt igaz, mert $n \in \mathcal{N} : A_n \mapsto_S A_n \mapsto_S A_{n-1} \mapsto_S A_{n-2} \ldots \mapsto_S A_0 \mapsto_S C$. Mivel a $\mapsto$ tranzitív lezártja a $\hookrightarrow_S$, ezért $\forall n \in \mathcal{N} : A_n \hookrightarrow_S C$, erre pedig alkalmazzuk a $\hookrightarrow_S$ diszjunktivitását, és így megkapjuk a feladat állítását.

Feladat 4.22 *Igaz-e?*

$$\frac{\forall m \in \mathcal{N} : (P_m \hookrightarrow_S Q_m)}{(\bigvee_{m \in \mathcal{N}} P_m) \hookrightarrow_S (\bigvee_{m \in \mathcal{N}} Q_m)}$$

Megoldás :

Igaz. A bizonyításhoz a $\hookrightarrow_S$ disztributivitása miatt elég lenne megmutatni, hogy

$$\forall m \in \mathcal{N} : (P_m \hookrightarrow_S (\bigvee_{m \in \mathcal{N}} Q_m))$$

Viszont tudjuk, hogy $\forall m \in \mathcal{N} : (Q_m \Rightarrow (\bigvee_{m \in \mathcal{N}} Q_m)$ így ebből és az első feltételből:

$$\forall m \in \mathcal{N} : (P_m \hookrightarrow_S Q_m \hookrightarrow_S (\bigvee_{m \in \mathcal{N}} Q_m)$$

A tranzitivitás miatt viszont innen már következik a bizonyítandó állítás.

Feladat 4.23 *Igaz-e?*

$$\frac{\forall i \in I : (P_i \hookrightarrow_S (Q_i \vee R),\ \ Q_i \rhd_S R)}{(\bigwedge_{i \in I} P_i) \hookrightarrow_S ((\bigwedge_{i \in I} Q_i) \vee R)}$$

Megoldás :

Igaz. Alkalmazzuk a 4.15 feladatot úgy, hogy az ottani B legyen mostani a Q_i, a P legyen a P_i, és az ottani Q legyen a mostani R, ráadásul ay ott használt R -be is a mostani R-et írjuk! Ezek alapján azt kapjuk, hogy :

$\forall i \in I : P_i \hookrightarrow_S R$. Viszont azt is tudjuk még logikából, hogy $\bigwedge_{i\in I} P_i \Rightarrow P_i$ és $R \Rightarrow R \vee (\bigwedge_{i\in I} Q_i)$ A 4.2 -ben elmondott gyengítési tétel miatt :

$$\bigwedge_{i\in I} P_i \hookrightarrow_S P_i \hookrightarrow_S R \hookrightarrow_S R \vee (\bigwedge_{i\in I} Q_i)$$

Ha most alkalmazzuk a $\hookrightarrow_S$ tranzitivitását, akkor a bizonyítandó áll´ást kapjuk.

Feladat 4.24 *Legyen M egy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz. Igaz-e?*

$$\frac{\forall m \in M : (P(m) \hookrightarrow_S Q(m))}{\bigvee_{m\in M} P(m)) \hookrightarrow_S (\bigvee_{m\in M} Q(m))}$$

Megoldás :

Igaz. A $\hookrightarrow_S$ disztributivitása miatt elég lenne megmutatni, hogy

$$\forall m \in M : P(m)) \hookrightarrow_S (\bigvee_{m\in M} Q(m)).$$

Viszont tudjuk, hogy például $Q_1 \Rightarrow (\bigvee_{m\in M} Q(m))$, ezért alkalmazva a 4.1 -t, azt kapjuk, hogy

$$Q_1 \hookrightarrow_S (\bigvee_{m\in M} Q(m)).$$

Az első feltételt felírva $m = 1$ -re, és felhasználva a tranzitív tulajdonságot, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk :

$$P_1 \hookrightarrow_S Q_1 \hookrightarrow_S (\bigvee_{m\in M} Q(m)).$$

Chapter 5

Programtulajdonságok

Feladat 5.1 *Programhelyesség*

Legyen N egy természetes szám!
$V = vector([1..N] : \mathcal{Z})$
$\mathcal{H} = set([1..N])$

$$A = \underset{a}{V} \times \underset{h}{\mathcal{H}} \times \underset{m}{\mathcal{Z}} \qquad B = \underset{a'}{V}$$

$$a = a' \in INIT_b \tag{1}$$

$$\uparrow \in TERM_b \tag{2}$$

$$R \in FP_b \tag{3}$$

$$R = \forall j \in [1..N] : ((a[j] \leq m) \;\wedge\; (a[j] = m \Leftrightarrow j \in h)) \;\wedge$$
$$\wedge\; \exists j \in [1..N] : (a[j] = m) \;\wedge\; a = a'$$

Igazoljuk, hogy az alábbi program megfelel a fenti specifikációnak!

$s_0 : m, h := -\infty, \emptyset$

$\{$

$$S ::= \quad \underset{i=1}{\overset{N}{\square}} h, m := \begin{cases} h \backslash \{i\}, m & \text{, ha } a[i] < m \\ h \cup \{i\}, a[i] & \text{, ha } a[i] \geq m \end{cases}$$

$\}$

Megoldás :

$$fixpont_S = \bigwedge_{i=1}^{N} ((a[i] < m \Rightarrow i \notin h) \wedge (a[i] \geq m \Rightarrow (i \in h \wedge m = a[i]))) \;=$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{H} (a[i] \leq m \wedge a[i] = m \Leftrightarrow i \in h)$$

$inv_S : a = a'$, triviális, mert a program egyik értékadása sem változtatja meg az a értékét.

$m = -\infty \Rightarrow \neg fixpont_S$

$inv_S : P = (m = \max\{a[j] : j \in h\})$ (Megjegyzés: $\max\emptyset = -\infty$)

1. $sp(s_0, a = a') \rightarrow P$, valóban: $sp(s_0, a = a') = (a = a' \wedge m = -\infty \wedge h = \emptyset)$.

2. P $stabil_S$:

$lf(S,P) = \bigwedge_{i=1}^{N} lf(s_i, m = \max\{a[j] : j \in h\})$

Elég belátni, hogy $\forall i \in [1..N] : P \Rightarrow lf(s_i, P)$, ez pedig látható a leggyengébb előfeltételből:

$lf(s_i, P) = (m = \max\{a[j] : j \in h\backslash\{i\}\} \wedge a[i] < m) \ \vee \ (a[i] = \max\{a[j] : j \in h \cup \{i\}\} \wedge a[i] \geq m)$

Mivel a fixpontban $m \neq -\infty$, a P invariáns miatt m a h (nem üres) halmazon felvett értékek maximuma, tehát $\exists j \in [1..N] : (a[j] = m)$.

Ezek alapján nyilvánvaló, hogy

$$fixpont_S \wedge (a = a') \Rightarrow R$$

Legyen $M = \max\{a[i] : i = 1..N\}$ és a variáns függvény $v = M - m$.
$v \geq 0$ és $v = 0 \Leftrightarrow M = m$.

Állítás: $v > 0 \hookrightarrow_S v = 0$.

Elég belátni, hogy $(v > 0 \wedge v = k) \mapsto_S (v > 0 \wedge v < k \vee v = 0)$. A v nem nőhet, mert az m egyik értékadásban sem csökken. Ha $v > 0$, akkor $m < M$, tehát van olyan i, hogy $m < a[i]$, ekkor az i. értékadás csökkenti a v-t.

Állítás: $m = M \hookrightarrow_S fixpont_S$.

Feladat 5.2 *Programhelyesség*

Legyen $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, és $n \geq 1$ tetszőleges természetes szám.
Legyen $f : \mathcal{B}^n \mapsto \mathcal{B}^n$ monoton növekedő függvény.
$f = (f_1, ..f_n)$, ahol $f_i : \mathcal{B}^n \mapsto \mathcal{B}$.

$$A = \underset{a}{\mathcal{B}^n}$$

$$\uparrow \in TERM$$

$$(f(a) = a) \in FP$$

Igazoljuk, hogy az alábbi program megfelel a specifikációnak!

$s_0 : a := \underline{0}$

$\{$

$\underset{i=1}{\overset{n}{\square}}\ a_i := f_i(a)$

$\}$

Megoldás :

$$fixpont_S = \bigwedge_{i=1}^{n} (a_i = f_i(a)) = (a = f(a))$$

Nyilvánvaló, hogy $fixpont_S \Rightarrow R$.

$inv_S : (a \leq f(a))$

1. $sp(s_0, \uparrow) \Rightarrow (a \leq f(a))$, nyilvánvaló, hogy $\underline{0} \leq f(\underline{0})$.
2. $a \leq f(a)$ stabil.

Legyen $G_i : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}^n$, $(i = 1..n)$, olyan hogy

$$G_i = (pr_1, \ldots, pr_{i-1}, f_i, pr_{i+1}, \ldots, pr_n)$$

ahol $pr_j : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ a j. projekció. Az f monotonitásából következik, hogy minden G_i is monoton nő, ekkor az $a_i := f_i(a)$ ért'ekadás megfelel az $a := G_i(a)$ eŕtékadásnak.

$lf(S, a \leq f(a)) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} lf(a_i := f_i(a), a \leq f(a)) == \bigwedge\limits_{i=1}^{n} lf(a_i := G_i(a), alef(a)) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} (G_i(a) \leq f(G_i(a)))$

Elég: $(a \leq f(a)) \Rightarrow (G_i(a) \leq f(G_i(a)))$.

Mivel $a \leq f(a)$, így $a_i \leq f_i(a)$, ezért $a \leq G_i(a) \leq f(a)$.

$a \leq G_i(a)$ és f monotonitása miatt $f(a) \leq f(G_i(a))$. Tekintve, hogy $G_i(a) \leq f(a)$, $G_i(a) \leq f(G_i(a))$.

Legyen $b = f^k(0)$, a feladatban említett k-val.

A variáns függvény: $v = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Megjegyzés: $inv_S : a \leq b$.

Elég belátni, hogy $(v = m) \Rightarrow ((v < m) \vee fixpont_S)$. (A v nem növekvéséhez fontos a fent bizonyított invariáns.)

Feladat 5.3 *Programhelyesség*

$A = \mathcal{Z}^n \quad a_1, \ldots, a_n : \mathcal{Z}$,
$B = \mathcal{Z}^n \quad a'_1, \ldots, a'_n : \mathcal{Z}$,

Q::=$\forall i \in [1..n] : (a_i = a'_i \wedge a'_i > 0)$
Spec. 1.

$$Q \in INIT_{a'_1,\ldots,a'_n} \tag{5.1}$$
$$Q \hookrightarrow \mathrm{FP}_{a'_1,\ldots,a'_n} \tag{5.2}$$
$$\mathrm{FP}_{a'_1,\ldots,a'_n} \Rightarrow a_1 = lnko(a'_1,\ldots,a'_n) \tag{5.3}$$

Spec. 2.

$$inv_{a'_1,\ldots,a'_n}(lnko(a'_1,\ldots,a'_n) = lnko(a_1,\ldots,a_n)) \tag{5.4}$$
$$\mathrm{FP}_{a'_1,\ldots,a'_n} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n \tag{5.5}$$

v::=$\sum_{i=1}^{n} a_i$
Igaz-e, hogy a 5.4-5.5 specifikáció finomítása a 5.2 feltételnek? Igaz-e, hogy az alábbi program megoldja a 5.4-5.5 feltételekkel és a v variánsfüggvény bevezetésével finomított feladatot?

$$s_0 : \ SKIP$$

$$S : \{\underset{i,j \in [1..n]}{\Box} a_i := a_i - a_j, \text{ ha } a_i > a_j\}$$

Feladat 5.4 *Programhelyesség*

$V = vektor([1..n], \mathcal{N})$
$A = V \times V \quad x, y : V,$
$B = V \quad x' : V,$
Q::=$(n > 1)$
Spec. 1.

$$Q \in INIT_{x'}$$

$$Q \hookrightarrow \mathrm{FP}_{x'}$$

$$\mathrm{FP}_{x'} \Rightarrow y \in perm(x') \wedge r(y),$$

ahol $perm(y)$ azon vektorok halmaza, amelyeket y-ból az y elemeinek permutálásával kapunk, $r(y)$::=$\forall i, j \in [1..n] : i < j \rightarrow y(i) \leq y(j)$.
Spec. 2. Bővítjük az állapotteret $k : \mathcal{N}$-nel.

$$inv_{x'}(y(1..k) \in perm(x'(1..k)) \wedge r(y(1..k))) \tag{5.6}$$
$$\mathrm{FP}_{x'} \Rightarrow k = n \tag{5.7}$$

v::=$n - k$
Igaz-e, hogy a 5.6-5.7 specifikáció finomítása a 5 feltételnek? Igaz-e, hogy

az alábbi program megoldja a 5.6-5.7 feltételekkel és a v variánsfüggvény bevezetésével finomított feladatot?

$$s_0 : \ k := 0$$

$$S : \{k := k + 1 || y(1..k + 1) := beszur(y(1..k), x(k + 1)), \text{ ha } k < n\},$$

ahol $beszur(y(1..k), x(k + 1))::= \underset{i\in[1..n]}{||} y(1..k + 1)(i) := f(y, k, x(k + 1), i)$ és

$$f(y, k, x(k+1), i)::= \begin{cases} y(i), & \text{ha } x(k+1) > y(i) \wedge i \in [1..k] \\ y(i-1), & \text{ha } x(k+1) \leq y(i-1) \wedge i \in [2..k+1] \\ x(k+1), & \text{ha } (i = 1 \vee x(k+1) > y(i-1)) \wedge \\ & \quad (x(k+1) \leq y(i)) \wedge i \in [2..k] \end{cases}$$

Igaz-e, hogy $r(x) \Rightarrow lf(y := beszur(x, a), y \in perm(x, a) \wedge r(y))$?

Feladat 5.5 *Programhelyesség*

Adottak az $f, g, h : N_0 \to N_0$ függvények, melyekre:

$$\forall t : f(f(t)) = f(t)$$

$$f(t) \geq t \wedge f(t + 1) \geq f(t)$$

(Hasonlóan g-re illetve h-ra is.)
Legyen továbbá $com : N_0 \to \{0, 1\}$ a következő:

$$com(t) \Leftrightarrow t = f(t) = g(t) = h(t)$$

Tekintsük a következő specifikációt:

$$inv : R \geq 0 \wedge \forall i \in [0, R) : \neg com(i)$$

$$\text{FP} \to com(R)$$

$$\neg\text{FP} \wedge R = k \hookrightarrow R > k$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő program megfelel a fenti specifikációnak:
INIT: $R = 0$

$$\{R := f(R) \sqcup \ R := g(R) \sqcup \ R := h(R)\}$$

Feladat 5.6 *Programhelyesség*

Adott az $A[0..N]$ vektor, amelynek elemei természetes számok. $N \geq 0$. Rendezzük az A vektort növekvően!

- a) Írjuk fel a feladat specifikációját!
- b) Bizonyítsuk be, hogy a következő program megfelel a specifikációnak:

$$\underset{0 \leq i < N}{\cup} \{A[i], A[i+1] := A[i+1], A[i], \text{ ha } A[i] > A[i+1]\}$$

Feladat 5.7 *Programhelyesség Feladat: számoljuk ki a Pascal háromszög első N sorát (a 0-tól az N-ig)!*

Specifikáció:

$$FP \Rightarrow (\forall n \in [0..N]; k \in [0..n] : c[n,k] = \binom{n}{k})$$

Az invariáns finomítśához használjuk fel:

$$\binom{n}{0} = 1; \ \binom{n}{n} = 1; \ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Fejezzük be a specifikációt, majd lássuk be, hogy az alábbi program megoldja a feladatot, ill. megfelel a specifikációnak! A fenti specifikációhoz adott a program:

$$Init: \ (\forall i \in [0..N]; j \in [0..i]: \ c[i,j] = 0)$$

$$Assign: \ \bigcup_{n=0}^{N} \{\| \ 0 \leq i \leq n : c[n,0], c[n,n] := 1, 1\} \ \bigcup$$

$$\bigcup \bigcup_{n=2}^{N} \{\| \ 1 \leq k \leq N-1 : c[n,k] := c[n-1,k-1] + c[n-1,k]\}$$

Bizonyítsuk be, hogy a fenti specifikáció megoldja a feladatot!

Feladat 5.8 *Lokális minimumok száma*

Adottak az n hosszúságú egészeket tartalmazó vektor. Adjuk meg, hogy hány lokális minimum van a vektorban. (Lokális minimum egy elem, ha kisebb a baloldali és nem nagyobb a jobboldali szomszédjánál.) Oldjuk meg a feladatot legfeljebb $n + 100$ processzorral szinkron arhitekturán a lehető legkevesebb lépésben.

- a) Specifikáljuk a feladatot!
- b) Adjunk megoldó programot és mutassuk meg, hogy megfelel a specifikációnak !

Feladat 5.9 *Feltételes összegzés*

Adott az $A : [1..N] \to Z$ vektor, és az $f : [1..N] \to \{0, 1\}$ függvény.
Számítsuk ki a

$$\sum_{i=1}^{N} \chi(f(i)) * A[i]$$

értéket!
Készítsük el a feladat specifikációját, írjunk fel megoldó programot és lássuk be a helyességét (teljes pontszám, ha: $\mathcal{O}(N)$ proceszszoron legfeljebb $\mathcal{O}(\log(N))$ lépésben megoldja a program a feladatot).

Feladat 5.10 *Logikai mátrix sorainak egyezése egy mintával*

Adottak az $n \times m$ logikai mátrix és az m-elemű logikai vektor. Adjuk meg, hogy a mátrix hány sora egyezik meg a vektorral. Oldjuk meg a feladatot $m \times n$ processzorral szinkron arhitekturán a lehető legkevesebb lépésben.

- a) Specifikáljuk a feladatot!
- b) Adjunk megoldó programot és mutassuk meg, hogy megfelel a specifikációnak

Feladat 5.11 *Logikai mátrix szorzása*

Adottak az $n \times m$ logikai mátrix és az m-elemű logikai vektor. Számítsuk ki a mátrix és a vektor szorzatát. Oldjuk meg a feladatot $m \times n$ processzorral szinkron arhitekturán a lehető legkevesebb lépésben.

- a) Specifikáljuk a feladatot!

- b) Adjunk megoldó programot és mutassuk meg, hogy megfelel a specifikációnak

Feladat 5.12 *Első egyezés*

Adottak az $f, g, h : [1..N] \to Z$ függvények. Számítsuk ki az $l \in \{0, 1\}$ és $i \in [1..n]$ értékeket, ahol i az első olyan index, melyre a három függvény értéke megegyezik, l az a tulajdonság, hogy létezik ilyen index.

- a) Specifikáljuk a feladatot!
- b) Adjunk megoldó programot és mutassuk meg, hogy megfelel a specifikációnak

(teljes pontszám, ha: $\mathcal{O}(N)$ proceszszoron legfeljebb $\mathcal{O}(\log(N))$ lépésben megoldja a program a feladatot).

Feladat 5.13 *Számoljuk ki két N bites bináris szám szorzatát (specifikáljuk, adjunk rá programot, majd lássuk be, hogy a program megoldja a feladatot, megfelel a specifikációnak) legfeljebb $O(N^2)$ processzoron legfeljebb $O(log^2(N))$ időben! A megengedett műveletek: léptetés, bitek egyenlőségvizsgálata és bitre vonatkozó értékadás.*

Feladat 5.14 *Adott egy irányított, véges, körmentes gráf. Döntsük el, hogy van-e a gráfnak olyan irányított útja, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint! (A gráfot egy $n * k$-s mátrixban reprezentáljuk.) A gráf csúcsainak száma: n, a csúcsok fokszáma legfeljebb k. Rendelkezésre áll $O(n * k)$ processzor. Oldd meg a feladatot nem több, mint $O(\log(n))$ lépésben! (Egy lépésnek számít egy olyan egyszerű értékadás, amely során a baloldalon álló változó értéke megváltozik.)*

Feladat 5.15 *Adott egy irányított, véges, körmentes gráf. A csúcsokat 0-val, illetve 1-gyel címkézzük. Döntsük el, hogy van-e a gráfnak olyan irányított útja, amely mentén a csúcsok címkéinek sorozata pontosan egy előre megadott természetes szám kettes számrendszerben felírt alakját adja meg! A gráf csúcsainak száma: n, a csúcsok fokszáma legfeljebb k. (A gráfot egy $n*(k+1)$-es mátrixban reprezentáljuk.) Rendelkezésre áll $O(n*k)$ processzor. Oldd meg a feladatot nem több, mint $O(\log(n))$ lépésben! (Egy lépésnek számít egy olyan egyszerű értékadás, amely során a baloldalon álló változó értéke megváltozik.)*

Feladat 5.16 *Visszavezetés*

Adott egy fekete-fehér digitalizált kép egy sora az N hosszúságú v vektorban. A vektor egy eleme 0 vagy 1, a 0 a fekete, az 1 fehér képpontot jelöl. A sor minden képpontjára állapítsuk meg (azaz írjuk a d vektor megfelelő elemébe), hogy milyen messze van tőle jobbra az első fekete képpont ! (Fekete pontokra ez az érték 0)

Feladat 5.17 *Visszavezetés*

Adott egy fekete-fehér, N sorból és M oszlopból álló, digitalizált kép. A kép minden képpontjára az m mátrix tartalmazza, hogy milyen messze van tőle jobbra az első fekete képpont (Fekete pontokra ez az érték 0). A kép egy bekezdésekre tagolt szöveget tartalmaz, minden bekezdés első sora beljebb kezdődik. Meg szeretnénk keresni a bekezdések kezdetét a k'epen. Feladat : Jelöljük meg a kép első oszlopának azon pontjait (azaz az l logikai vektor megfelelő elemeit állítsuk igazra) , melyek felett van legalább h olyan sor, melynek első w képpontja feh'er.

Chapter 6

Az Unió program tulajdonságai

Ebben a fejezetben legyen $S = S_1 \cup S_2$.

Feladat 6.1 *Igaz-e?*

$$\frac{A \mapsto_{S1} B,\ B \mapsto_{S1} C,\ (A \vee B) \rhd_{S2} C}{(A \vee B) \hookrightarrow_S C}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda:

$$A ::= \{1\},\ B ::= \{2\},\ C ::= \{3\}$$

$$S_1 ::= \{x := x + 1\},\ S_2 ::= \{x := 1\}$$

Ekkor :

1. $A \mapsto_{S1} B$ teljesül, hiszen rögtön S_1 első alkalmazásánál eljutunk B -be: $A \wedge \neg B = \{1\} \Rightarrow lf(S_1, \{1, 2\})$
2. $B \mapsto_{S1} C$ is teljesül, mivel: $B \wedge \neg C = \{2\} \Rightarrow lf(S_1, \{2, 3\})$
3. $(A \vee B) \rhd_{S2} C$ is teljesül, hiszen $A \vee B stabil_{S_2}$
4. Viszont $(A \vee B) \hookrightarrow_S C$

Feladat 6.2 *Igaz-e?*

$$\frac{A \mapsto_{S1} C,\ \ B \rhd_{S1} A,\ \ B \mapsto_{S2} C,\ \ A \rhd_{S2} B}{(A \wedge B) \hookrightarrow_S C}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$A ::= \{1,2\},\ B ::= \{2,3\},\ C ::= \{0\}$$

$$S_1 ::= x := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in A \\ 1, & \text{ha } x \in B \end{cases}$$

$$S_2 ::= x := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in B \\ 3, & \text{ha } x \in A \end{cases}$$

Ekkor :

1. $A \mapsto_{S1} C$ teljesül, hiszen rögtön S_1 első sorát alkalmazva C -be jutunk.
2. $B \mapsto_{S2} C$ is teljesül S_2 első sora miatt.
3. $B \rhd_{S1} A$ illetve $A \rhd_{S2} B$ S_1 illetve S_2 második sora miatt áll fent.
4. Viszont $(A \wedge B) \hookrightarrow_S C$-t átírva : $(A \wedge B) = \{2\} \hookrightarrow_S \{0\}$ kéne nekünk, de tudunk egy olyan feltétlenül pártatlan ütemezést adni, amelyre ez nem teljesül. [1] Ez az ütemezés : Elsőként az S_1 -t alkalmazzuk, és annak is a második sorát. Ezután az S_2 -t, és mivel A -ban vagyunk, muszáj a második sort alkalmaznunk. gy a B -be jutunk, erre pedig S_1 második sorát alkalmazzuk. Ezt akármeddig tudjuk úgy folytatni, hogy nem lépünk a C -be, hiszen felváltva lépünk a $x = 1$ és a $x = 3$ között.

Feladat 6.3 *Igaz-e?*

$$\frac{P \mapsto_{S1} \neg P}{P \mapsto_S \neg P}$$

Megoldás :

Igaz. Az Unió viselkedési relációja miatt elég azt belátni, hogy $P \rhd_{S1} \neg P$ és $P \rhd_{S2} \neg P$ és $P \mapsto \neg P$ vagy az S_1 -ben, vagy az S_2 -ben. A feladat feltételét felhasználva, rögtön látszik, hogy $P \mapsto_{S1} \neg P$ teljesül, és így $P \rhd_{S1} \neg P$ is. Azt kéne még megmutatni, hogy $P \rhd_S 2 \neg P$, ez viszont már szerepel $\rhd_S$ tulajdonságai között.

Feladat 6.4 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q,\ \ P \hookrightarrow_{S2} Q}{P \hookrightarrow_S Q}$$

[1] Ha ellenpéldát adunk egy S -beli tulajdonságra, mindig mutatnunk kell egy feltétlenül pártatlan ütemezést, melyre nem áll fent az adott tulajdonság.

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{0, 1\}, \quad Q ::= \{x \leq -2 \vee x \geq 2\}$$

$$S_1 ::= \{x := x + 1\}, \ S_2 ::= \{x := x - 1\}$$

Ha csak az S_1 -t vagy csak az S_2 -t használjuk, akkor P -ből Q -ba jutunk. (S_1 esetén a Q pozitív, míg S_2 esetén a Q negatív részébe) Viszont ha felváltva használjuk S_1 -t és S_2 -t (úgy hogy S_1 -t alkalmazzuk először), akkor egy olyan feltétlenül pártatlan ütemezést kapunk, ami nem vezet ki a P -ből, és sose éri el a Q -t.

Feladat 6.5 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q, \ \ P \mapsto_{S2} Q}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \{1\}, \quad Q ::= \{3\}$$

$$S_1 ::= \{x := x + 1\}, \ S_2 ::= \{x := x + 2\}$$

Ekkor teljesülnek a feladat feltételei, hiszen S_1 kétszeri alkalmazásával P -ből Q -ba jutunk, és S_2 pedig egyből a Q -ba visz. Az ellenpéldának az a lényeges tulajdonsága, hogy amikor S_1 egyszeri alkalmazásával P -ből Q -ba indulunk, akkor egy olyan pontba jutunk, ahonnan S_2 nagyon rossz helyre tud vinni. $P \hookrightarrow_S Q$ nem áll fent, mert ha először S_1 -t alkalmazzuk és utána S_2 -t, akkor az $x = 4$ állapotba jutunk, ahonnan már nem tudunk visszalépni a $x = 3$ -ba, akárhogyan is váltogatjuk a S_1 -t és S_2-t. A leírt ütemezés feltétlenül pártatlan, mivel S_1 és S_2 felváltva kerültek felhasználásra.

Feladat 6.6 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q, \ \ P \hookrightarrow_{S2} Q, \ \ P\, stabil_{S1}\ , \ P\, stabil_{S2}}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Hiába erősítettük a feltételeket, még mindig nem igaz. Ellenpélda :

$$P ::= \uparrow, \quad Q ::= \{x \leq -2 \vee x \geq 2\}$$

$$S_1 ::= \{x := x + 1\}, \ S_2 ::= \{x := x - 1\}$$

A feltételek $P ::= \uparrow$ miatt triviálisan teljesülnek, de hogyha az $x = 0 \in P$ állapotból indulunk, és felváltva alkalmazzuk a programokat, akkor sohasem jutunk Q -ba.

Feladat 6.7 *Igaz-e?*
$$\frac{P \mapsto_{S1} Q,\ \ P \mapsto_{S2} Q}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Igaz. Viszont most már túlságosan is erősítettünk a feltételeken, hiszen nem csak $P \hookrightarrow_S Q$ teljesül, hanem $P \mapsto_S Q$ is, az unió viselkedési relációja miatt.

Feladat 6.8 *Igaz-e?*
$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q,\ \ P \mapsto_{S2} Q\ ,\ Pstabil_{S1}}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Igaz. Mivel $Pstabil_{S1}$, ezért $P \rhd_{S1} \downarrow$ és emiatt pedig $P \rhd_S 1Q$. A második feltétel miatt $P \rhd_{S2} Q$, és alkalmazva az Unió viselkedési relációját, a feladat állítását kapjuk. [2]

Feladat 6.9 *Igaz-e?*
$$\frac{P \mapsto_{S1} Q,\ \ Q \Rightarrow R,\ \ P \rhd_{S2} Q}{(P \vee Q) \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Igaz. Először a $\hookrightarrow_S$ diszjunktivitását használjuk, emiatt tudjuk, hogy elég bebizonyítani $Q \hookrightarrow_S R$ -t és $P \hookrightarrow_S R$ -t. $Q \hookrightarrow_S R$ fennáll, hiszen $Q \Rightarrow R$ -t feltettük, és 4.1 -ben beláttuk, hogy ebből $Q \hookrightarrow_S R$ következik. $P \hookrightarrow_S R$ -t a $\hookrightarrow_S$ tranzitivitása segítségével látjuk be, hiszen $P \hookrightarrow_S Q$ -ból és $Q \hookrightarrow_S R$ -ből már következik $P \hookrightarrow_S R$. $Q \hookrightarrow_S R$ -t az előbb láttuk be, $P \hookrightarrow_S Q$ megmutatásához az Unió viselkedési relációját használjuk fel :

1. $P \mapsto_{S1} Q$ igaz, hiszen szerepelt a feltételek között.
2. $P \rhd_{S1} Q$ is igaz, hiszen $\mapsto_S$-ből $\rhd_S$ következik
3. $P \rhd_{S2} Q$ pedig szintén szerepelt a feltételek között, tehát ez is igaz.

Ebből a három dologból pedig $P \hookrightarrow_S Q$, és ezáltal a feladat állítása is következik.

Feladat 6.10 *Igaz-e?*
$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q,\ \ Q \mapsto_{S1} R,\ \ R \in \mathrm{inv}_{S2}}{P\ \hookrightarrow_S\ R}$$

[2] A bizonyítás során nem használtuk fel az első feltételt!

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$P::=\{2\},\quad Q::=\{3\},\quad R::=\{4\}$$

$$S_1::=\{x := x+1\},\ S_2::=\{x := \sqrt{x}+2\}$$

Az eléggé furcsa ellenpéldának az a lényeges tulajdonsága, hogy az S_2 az $x = 4$ -ből $x = 4$ -be visz (tehát az R tényleg invariáns), ellenben a P -hez és a Q -hoz irracionális számokat rendel, így azokból sose fogunk az R -be jutni. A feltétlenül pártatlan ütemezés pedig a következő : P -ből indulva először S_1 -gyel lépünk, másodszor viszont S_2 -vel, így az $x = \sqrt{3}+2$ -be jutottunk. Ettől kezdve felváltva alkalmazzuk az S_1 -et és az S_2 -őt. $P \hookrightarrow_S 1Q$ és $Q \mapsto_{S1} R$ is teljesül, de a $P \hookrightarrow_S R$ nem igaz.

Feladat 6.11 *Igaz-e?*

$C::=(\bigvee\limits_{i \in \mathcal{N}} A_i)$

$$\frac{C stabil_{S1}\ ,\ \forall i \in \mathcal{N} : (A_i \mapsto_{S2} B}{C \hookrightarrow_S B}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda :

$$A_1::=\{x<0\},\ A_2::=\{x>0\},\ B::=\{x=0\}$$

$$S_1::=\{x := -x\},\quad S_2::=x := \begin{cases} 0, & \text{ha } x<0 \\ 0, & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

Ekkor a mindkét feltétel biztosan teljesül, hiszen S_1 A_1 -ből A_2 -be lép , és fordítva, míg S_2 A_1-ből és A_2 -ből is az $x = 0$ állapotba jut, ami nem más, mint B. Az ellenpéldának az a lényege, hogy ha valamelyik A_i -re alkalmazzuk az S_2 programot, akkor az S_2 -nek azt az utasítását kell alkalmazni, amelyiknek a feltétele nem áll fent. gy adhatjuk meg az alábbi feltétlenül pártatlan ütemezést. Az $x < 0$ állapotból indulunk. Először az S_2 második utasítását alkalmazzuk, majd S_1 -et. Ekkor a $x > 0$ állapotban vagyunk. Most alkalmazzuk az S_2 első utasítását, majd újra az S_1 -et. Visszaérkeztünk a kezdőállapotba, és újra folytathatjuk a programok utasításainak alkalmazását anélkül, hogy B -be jutnánk.

Feladat 6.12 *Igaz-e?*

$C::=(\bigvee\limits_{i \in \mathcal{N}} A_i)$

$$\frac{C \mapsto_{S1} B\ ,\ \forall i \in \mathcal{N} : (A_i \mapsto_{S2} B}{C \hookrightarrow_S B}$$

Megoldás :

Igaz. Azt fogjuk belátni, hogy a $(\bigvee_{i\in\mathcal{N}} A_i)\mapsto_S B$. Ehhez (az unió viselkedési relációja miatt) elég megmutatni, hogy : $(\bigvee_{i\in\mathcal{N}} A_i)\mapsto_{S1} B$ és $(\bigvee_{i\in\mathcal{N}} A_i)\rhd_{S2} B$. Az első viszont igaz, hiszen szerepelt a feladat feltételei között, míg a második azért teljesül, mert $\forall i \in \mathcal{N} : (A_i\mapsto_{S2} B$, és így $\forall i \in \mathcal{N} : (A_i\rhd_{S2} B$, innen pedig fel tudjuk használni $\rhd_S$ diszjunktivitását (2.11).

Feladat 6.13 *Igaz-e?*

$$\frac{(P\wedge\neg B)\mapsto_{S1} Q,\ \ (P\wedge\neg B)\mapsto_{S2} R,\\ (P\wedge B)\Rightarrow Q,\ \ Q stabil_{S1},\ \ Q\mapsto_{S2} R}{P\hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda:

$$P{::=}\{1,2\},\ Q{::=}\{2,3\},\ R{::=}\{4\},\ B{::=}\{2\}$$

$$S_1{::=}x := \begin{cases} 2, & \text{ha } x=1 \\ 2, & \text{ha } x=2 \\ 2, & \text{ha } x=3 \end{cases}$$

$$S_2{::=}x := \begin{cases} 4, & \text{ha } x=1 \\ 3, & \text{ha } x=2 \\ 4, & \text{ha } x=3 \end{cases}$$

P és B definíciója alapján : $P\wedge\neg B=\{1\}$ és $P\wedge B=\{2\}$. A feladat feltételei fennálnak :

1. $(P\wedge\neg B)\mapsto_{S1} Q$, azaz $\{1\}\mapsto_{S1}\{2,3\}$ teljesül, mivel S_1 első utasítása éppen ezt mondja.

2. $(P\wedge\neg B)\mapsto_{S1} R$, azaz $\{1\}\mapsto_{S2}\{4\}$ igaz, ezt meg S_2 első utasítása adja ki.

3. $(P\wedge B)\Rightarrow Q$ a halmazok definíciójából közvetlenül következik.

4. $Q stabil_{S1}$, hiszen akár az $x=2$, akár az $x=3$ pontból indulunk, az $x=2$ -be érkezünk, ami viszont Q -beli.

5. $Q\mapsto_{S2} R$ fennáll, mivel $x=2$ -ből S_2 alkalmazásával $x=3$ -ba jutunk, míg $x=3$ -ból $R=\{x=4\}$ -be.

Viszont létezik jó ütemezés, amire $P \hookrightarrow_S R$ nem teljesül : $x = 1$ -ből indulva először az S_1 -t alkalmazzuk, így a $x = 2$-be jutunk. Innentől kezdve felváltva használjuk az S_2 és a S_1 programok utasításait. Ekkor az $x = 2$ és a $x = 3$ állapotok között fogunk ugrálni, és sosem jutunk el a $x = 4$ -be.

Feladat 6.14 *Igaz-e?*
$$\frac{P \mapsto_{S1} Q \vee R,\ \ Pstabil_{S2},\ \ Q \hookrightarrow_S R}{(P \vee Q) \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Igaz. A $\hookrightarrow_S$ diszjunktivitása miatt elég azt belátni, hogy $P \hookrightarrow_S R$ és $Q \hookrightarrow_S R$. $Q \hookrightarrow_S R$ szerepel a feltételek között, tehát igaz, a $P \hookrightarrow_S R$ bizonyításához a $\hookrightarrow_S$ tranzitivitása miatt azt kéne megmutatni, hogy $P \hookrightarrow_S (Q \vee R)$ és $(Q \vee R) \hookrightarrow_S R$ teljesül.

1. $P \hookrightarrow_S (Q \vee R)$: $P \mapsto_{S1} Q \vee R$ a feltételek miatt teljesül, és így $P \rhd_S 1 Q \vee R$ is. $Pstabil_{S2}$-t átalakítva $P \rhd_{S1} \downarrow\Rightarrow (Q \vee R)$, és felhasználva a gyengítési tételt (2.1) , $P \rhd_{S2} Q \vee R$ is igaz lesz.Innen az unió viselkedési relációja alapján $P \hookrightarrow_S (Q \vee R)$ teljesülni fog.

2. $(Q \vee R) \hookrightarrow_S R$ -t úgy bizonyítjuk be, hogy tudjuk a feltételekből, hogy $Q \hookrightarrow_S R$; másrészt $R \hookrightarrow_S R$ is igaz a $\hookrightarrow_S$ tulajdonságai alapján, és ezeket disztributivitással összeragasztva kijön $(Q \vee R) \hookrightarrow_S R$

Feladat 6.15 *Igaz-e?*
$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q,\ \ P \hookrightarrow_{S2} R,\ \ Pstabil_S,\ \ Q \rhd_{S1} R}{P \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. Ellenpélda:

$$P ::= \{1,2,3\}, \quad Q ::= \{3\}, \quad R ::= \{1\}$$

$$S_1 ::= x := \begin{cases} 2, & \text{ha } x = 1 \\ 3, & \text{ha } x = 2 \\ 3, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

$$S_2 ::= x := \begin{cases} 2, & \text{ha } x = 3 \\ 1, & \text{ha } x = 2 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Az első két feltétel fennáll, hiszen S_1, illetve S_2 legfeljebb kétszeri alkalmazása után már biztosan Q -ban, illetve R -ben leszünk. $Pstabil_S$, hiszen egyik utasítás sem visz ki a P-ből, és $Q \rhd_S 1R$ is igaz, mivel Q -ból indulva S_1 nem lép ki onnan. Viszont az alábbi ütemezéssel az $x = 2$ -ből indulva sosem jutunk el a R-be, és ez az ütemezés még feltétlenül pártatlan is, hiszen felváltva alkalmazza a S_1 és S_2 program utasításait : $x = 2$ állapotra alkalmazzuk először az S_1 -t, majd az S_2 -t, ezután pedig felváltva. gy a $x = 2$ -ből a $x = 3$ -ba, majd onnan vissza a $x = 2$ -be jutunk, és ezt így folytatjuk a végtelenségig. Emiatt sosem jutunk el $x = 1$ -be.

Feladat 6.16 *Igaz-e?*

$$\frac{(P \wedge \neg B) \mapsto_{S1} Q,\ \ (P \wedge \neg B) \mapsto_{S2} R,\ \ Q \mapsto_{S1} R,\ \ Q \hookrightarrow_{S2} R,\ \ (P \wedge B) \hookrightarrow_{S} (P \wedge \neg B)}{P \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. Hiába a sok feltétel, létezik ellenpélda :

$$P ::= \{0, 1\},\ Q ::= \{2\},\ R ::= \{3\},\ B ::= \{0\}$$

$$S_1 ::= x := \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \\ 3, & \text{ha } x = 2 \\ 8, & \text{ha } x = 6 \\ 8, & \text{ha } x = 8 \end{cases}$$

$$S_2 ::= x := \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \\ 3, & \text{ha } x = 1 \\ 6, & \text{ha } x = 2 \\ 3, & \text{ha } x = 6 \\ 8, & \text{ha } x = 8 \end{cases}$$

Felhasználva P és B definícióját : $P \wedge \neg B = \{1\}$ és $P \wedge B = \{0\}$. Az ellenpéldának az az előnyös tulajdonsága, hogy a $Q \hookrightarrow_{S2} R$ során egy olyan pontba jutunk ahonnan S_1 -et alkalmazva egy rossz állapotba jutunk, ahonnan már nem tudjuk elérni R -et. Ehhez a következő feltételen pártatlan ütemezést válasszuk : $x = 0$ -ból indulva S_2 -t , majd S_1 -et, így a Q -ba jutunk. Most az S_2 a $x = 6$ állapotba visz minket, ahonnan S_1 -gyel továbblépve az $x = 8$ -ba jutunk. Innentől kezdve felváltva alkalmazhatjuk S_2 -t és S_1 -t, hiszen egyik program sem lép ki ebből az állapotból, és így nem jutunk el az R -be.

Feladat 6.17 *Igaz-e?*

$$\frac{(P \wedge R) \rhd_{S2} B,\ \ P \rhd_{S1} Q}{(P \wedge R) \rhd_S (Q \vee \neg R \vee B)}$$

Megoldás :

Igaz. Az unió viselkedési relációja miatt azt kellene megmutatni, hogy :

1. $(P \wedge R) \rhd_{S1} (Q \vee \neg R \vee B)$ Ehhez azt kellene megmutatni, hogy :

$$(P \wedge R) \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg B \Rightarrow lf(S_1, (P \wedge R) \vee Q \vee \neg R \vee B)$$

Viszont azt is tudjuk, hogy

$$(P \wedge R) \vee Q \vee \neg R \vee B = (P \vee Q \vee \neg R \vee B) \wedge (R \vee Q \vee \neg R \vee B) =$$

$$= (P \vee Q \vee \neg R \vee B) \wedge \uparrow = (P \vee Q \vee \neg R \vee B)$$

Elemi logikai átalakításokkal és a második feltételt felírva ($P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S_1, P \vee Q)$) és felhasználva :

$$(P \wedge R) \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg B \Rightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S_1, P \vee Q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lf(S_1, P \vee Q \vee \neg R \vee B) = lf(S_1, (P \wedge R) \vee Q \vee \neg R \vee B)$$

Ezzel beláttuk $(P \wedge R) \rhd_{S1} (Q \vee \neg R \vee B)$-t.

2. $(P \wedge R) \rhd_{S2} (Q \vee \neg R \vee B)$ Ezt úgy kapjuk meg, hogy az első feltételre alkalmazzuk a gyengítési tételt (ld. 2.1), és ezt joggal tehetjük, hiszen $B \Rightarrow Q \vee \neg R \vee B$.

Feladat 6.18 *Igaz-e?*

$$\frac{P \hookrightarrow_{S1} Q,\ \ (P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow fixpont_{S2}}{P \hookrightarrow_S (Q \vee \neg R)}$$

Feladat 6.19 *Igaz-e?*

$$\frac{P \rhd_{S1} (Q \wedge R),\ \ (P \wedge \neg R) \mapsto_{S2} Q,\ \ R \Rightarrow \neg P}{P \hookrightarrow_S Q}$$

Megoldás :

Nem igaz. ellenpélda :

$$P ::= \{x \leq -2 \vee x \geq 2\},\ Q ::= \{-2, -1, 0\},\ R ::= \{0, 1\}$$

$$S_1 ::= \{x := |x| + 1\}$$

$$S_2 ::= x := \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \leq -2 \\ -2, & \text{ha } x = -2 \\ -x, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

Felhasználva a P, Q, R definicióját, $Q \wedge R = \{0\}$ és $P \wedge \neg R = P$. Mivel $P stabil_{S1}$ ezért a $P \rhd_{S1} (Q \wedge R)$ feltétel biztos teljesülni fog. $(P \wedge \neg R) \mapsto_{S2} Q =$

$P \mapsto_{S2} Q$ is igaz, ugyanis S_2 harmadik utasítását alkalmazva az $x \leq -2$ -be jutunk, innen pedig az első utasítást elég sokszor használva, úgy érjük el a Q -t, hogy végig P -ben maradtunk. Viszont a $P \hookrightarrow_S Q$ nem áll fent, mivel az alábbi ütemezés feltétlenül pártatlan , és nem igaz rá a $P \hookrightarrow_S Q$: $\forall x \neq -2$-ből indulva, és először az S_1 -et végrehajtva, $x \geq 4$ számot kapunk. Ezután felváltva alkalmazva az S_2 és az S_1 utasításait, előbb a $x \leq -4$, majd a $x \geq 5$ állapotba jutunk, és ezáltal egyre jobban távolunk a Q -tól.

Feladat 6.20 *Igaz-e?*

$C := \bigvee_{n \in \mathcal{N}} A_n$

$$\frac{C\ stabil_{S2},\ \ \forall n \in \mathcal{N} : (A_n \mapsto_{S1} B)}{C \hookrightarrow_S B}$$

Megoldás :

Habár első látásra igaznak néz ki, nem igaz. Ellenpélda :

$$A_1 ::= \{0,1\},\ A_2 ::= \{3,4\},\ B ::= \{2,5\}$$

$$S_1 ::= x := \begin{cases} 4, & \text{ha } x = 0 \\ 3, & \text{ha } x = 1 \\ 1, & \text{ha } x = 3 \\ 0, & \text{ha } x = 4 \end{cases}$$

$$S_2 ::= \{x := x + 1\}$$

Pillanatnyilag az $n = 2$, $C = A_1 \vee A_2$. Ezért $C\ stabil_{S2}$ teljesül, hiszen az $x \in \{0,1,3,4\}$ pontokból ugyanida jutunk vissza. Mind A_1 -ből, mind A_2 -ből S_1 -et alaklamzva biztosan átlépünk a B -be, mivel az x értḱe folyamatosan nő. Tekintsük az alábbi ütemezést : Az $x = 1$ és az $x = 4$ állapotokból mindig az S_1 -et alkalmazzuk, így vagy az $x = 3$ vagy az $x = 0$ állapotba jutunk. Ekkor használhatjuk az S_2 -t, és így visszajutunk az $x = 1$ és az $x = 4$ állapotokba. Ezt csináljuk ameddig akarjuk, és sose jutunk el a B -be, és az elmondott ütemezés teljesíti a feltétlen pártatlan ütemezés kritḯumát.

Feladat 6.21 *Igaz-e?*

$P := \bigvee_{n \in \mathcal{N}} Q_n$

$$\frac{\forall n \in \mathcal{N} : (Q_n \mapsto_{S2} R),\ \ P \rhd_{S1} R}{P \hookrightarrow_S R}$$

Megoldás :

Nem igaz. [3] A 6.20 -ban adott ellenpélda ide is jó lesz, az ottani C megfelel az itteni P -nek, az A_i -k Q_i -knek, és a B az R -nek. Azt az ütemezést is kell alkalmazni, az teljesíti a $P \rhd_{S1} R$ új feltételt, viszont $P \hookrightarrow_S R$ most sem lesz igaz.

Feladat 6.22 *Igaz-e?*

$$\frac{P\ stabil_S,\ \ P \rhd_{S2} Q}{P \rhd_{S1} (P \wedge Q)}$$

[3] A 6.20 feltételeit csak csökkentettük, tehát annak ismeretében a feladat triviálisan hamis.

Chapter 7

Adatcsatorna

Feladat 7.1 *Aszinkronitás*

Legyen

$$F = \begin{cases} \ldots, [se]\ x := x \oplus d & \text{ha } bu \parallel \ldots \\ [re]\ vs, x := f(vs, x),\ g(x) & \text{ha } b(x) \wedge bv \parallel \ldots \end{cases}$$

program adott. Teljesül-e az aszinkronitási feltétel F -re, ha az [se] s [re] -ben szereplő függvények és változók a következő értékeket veszik fel:

$$\begin{array}{ll} x & : (fib_i, fib_{i+1}),\ ahol\ i \in [1..\infty);\ x.a = fib_i;\ x.b = fib_{i+1} \\ d & : seq(CHAR), \\ b(x) & :=\uparrow, \\ f(vs, x) & := vs + lnko(x.a, x.b), \\ g(x) & := x, \\ (fib_i, fib_{i+1}) \oplus d & := (fib_{i+1}, fib_{i+2}). \end{array}$$

Feladat 7.2 *Unióprogram*

Adott egy n dimenziós, egészeket tartalmazó vektor. Oldd meg az alábbi feladatot! Határozd meg

- \- a vektor számtani közepét,
- \- az elemek mértani közepét, valamint
- \- az előző két feladatra kapott megoldás és az unió tétel segítségével a számtani közép és a mértani közép különbségét.

Rendelkezésre áll $2*n+1$ processzor. Mutasd meg, hogy $O(log(n))$ lépésben megoldható a feladat. (Megj.: Először azzal speciális esettel foglalkozz, amikor $2*n$ helyett csak két processzor áll rendelkezésre.)

További segítségként megadjuk a számtani közép kiszámításának két specifikációját:

$A = V \times V \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{Q}$

$\quad v \quad x \quad k \quad l \quad s$

Spec_0:

- - $\uparrow \hookrightarrow$ FP
- - FP $\Rightarrow s = \sum_{i=1}^{n}(v(i)/n)$

  Spec_1:
- - inv $(k \in [1..n] \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} x(i) = \sum_{i=1}^{n} v(i))$
- - $(\neg\text{FP} \wedge k + l = t) \mapsto ((\neg\text{FP} \wedge k + l \leq t-1) \vee \text{FP})$
- - $(l = z \ \ konstans)$
- - FP $\Rightarrow (k=1) \wedge s = x(1)/n$

Legyen a teljes feladat állapottere és specifikációjának egy része a következő:

$A = V \times V \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{Q} \times V \times \mathcal{Q}$

$\quad v \quad x \quad k \quad l \quad s \quad y \quad m$

$$\text{FP} \Rightarrow s - m = \sum_{i=1}^{n}(v(i)/n) - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(v(i))}$$

.

Feladat 7.3 *Adatcsatorna*

Adott egy ASCII karaktereket tartalmazó szövegfile. Nyomtassuk ki ezt a szövegfile-t adott sorhosszal és lapmérettel. A szavakat nem választhatjuk el, ha a következő szó nem fér el az aktuális sorban, akkor és csak akkor új sorba kell írni. Minden szó elfér egy sorban. A feladatot minél több processzorból álló adatcsatornával oldjuk meg!

Feladat 7.4 *Aszinkronitás*

Legyen

$$F = \begin{cases} \ldots, [se] \ x := x \oplus d & \text{ha } bu \parallel \ldots \\ [re] \ vs, x := f(vs, x), \ g(x) & \text{ha } b(x) \wedge bv \parallel \ldots \end{cases}$$

program adott. Teljesl-e az aszinkronitsi felttel F -re, ha az [se] s [re] -ben szerepl fggvnyek s vltozk a kvetkez rtkeket veszik fel:

$$
\begin{array}{ll}
x & : (fib_i, fib_{i+1}),\ ahol\ i \in [1..\infty);\ x.a = fib_i;\ x.b = fib_{i+1} \\
d & : seq(CHAR), \\
b(x) & := \uparrow, \\
f(vs, x) & := vs + lnko(x.a, x.b), \\
g(x) & := x, \\
(fib_i, fib_{i+1}) \oplus d & := (fib_{i+1}, fib_{i+2}).
\end{array}
$$

Feladat 7.5 *Igaz-e?*

Adott F program. Legyen $F^{'} = F \cup \{s,\ ha\ P\}$, s legyen $F^{''} = F \cup \{s,\ ha\ Q\}$. Feltesszk, hogy $(Q \Rightarrow P)\ \wedge\ (Q \rhd \neg P)_{F'}\ \wedge\ (P \hookrightarrow Q)_F$. Igaz-e tetszleges R s S lltsokra, hogy:

a.) $(R \rhd S)_{F'}\ \Rightarrow\ (R \rhd S)_{F''}$,

b.) $(R \hookrightarrow S)_{F'}\ \Rightarrow\ (R \hookrightarrow S)_{F''}$?

Feladat 7.6 *Adatcsatorna*

Hatrozzuk meg $O(N^3)$ nemnegatv racionlis szm ngyzetgykt Newton mdszerrel N lpsig iterlva. A feladatot N processzoron adatcsatornval oldjuk meg !

Feladat 7.7 *Adatcsatorna*

Adott egy M hosszúságú sorozat, elemei n dimenziós, egész számokat tartalmazó vektorok. ($M > n^{10}$). Adott a v, ugyancsak n dimenziós, egész számokat tartalmazó vektor. Számítsd ki adatcsatorna alkalmazásával azt a sorozatot, melynek i. eleme a vektorsorozat i. eleme és a v vektor skaláris szorzata. (Rendelkezésünkre áll $n + 3$ processzor.)

Feladat 7.8 *Unióprogram*

Adott egy n dimenziós, egészeket tartalmazó vektor. Oldd meg az alábbi feladatokat: Határozd meg

- - a vektor harmonikus közepét,
- - az elemek átlagát, valamint
- - az előző két feladatra kapott megoldás és az unió tétel segítségével a harmonikus közép és az átlag különbségét.

Rendelkezésre áll $2*n+1$ processzor. Mutasd meg, hogy $O(log(n))$ lépésben megoldható a feladat.

További segítségként megadjuk az elemek átlaga kiszámításának két specifikációját:

$$A = \underset{v}{V} \times \underset{x}{V} \times \underset{k}{\mathcal{N}} \times \underset{l}{\mathcal{N}} \times \underset{s}{\mathcal{Q}}$$

Spec_0:

- - $\uparrow \hookrightarrow$ FP
- - FP $\Rightarrow s = \sum_{i=1}^{n}(v(i)/n)$

Spec_1:

- - inv $(k \in [1..n] \;\wedge\; \sum_{i=1}^{k} x(i) = \sum_{i=1}^{n} v(i))$
- - $(\neg\text{FP} \wedge k + l = t) \mapsto ((\neg\text{FP} \wedge k + l \leq t - 1) \vee \text{FP})$
- - $(l = z \;\; konstans)$
- - FP $\Rightarrow (k = 1) \wedge s = x(1)/n$

Legyen a teljes feladat állapottere és specifikációjának egy része a következő:

$$A = \underset{v}{V} \times \underset{x}{V} \times \underset{k}{\mathcal{N}} \times \underset{l}{\mathcal{N}} \times \underset{s}{\mathcal{Q}} \times \underset{y}{V} \times \underset{h}{\mathcal{Q}}$$

$$\text{FP} \Rightarrow h - s = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{v(i)})} - \sum_{i=1}^{n}(v(i)/n)$$

Feladat 7.9 *Adatcsatorna*

Adott egy M hosszúságú sorozat, elemei n dimenziós, egész számokat tartalmazó vektorok. $(M > n^{10})$. Adott egy m, $k * n$ dimenziós, egész számokat tartalmazó mátrix. Számítsd ki adatcsatorna alkalmazásával azt a sorozatot, melynek i. eleme az m mátrix és a vektorsorozat i. elemének szorzata. (Elemi művelet: két vektor skaláris szorzata, rendelkezésünkre áll $n + 3$ processzor.)

Feladat 7.10 *Adatcsatorna*

Adott egy M hosszúságú sorozat, elemei n dimenziós, egész számokat tartalmazó vektorok. $(M > n^{10})$. Adott a v, ugyancsak n dimenziós, egész számokat tartalmazó vektor. Számítsd ki adatcsatorna alkalmazásával azt a sorozatot, melynek i. eleme a vektorsorozat i. eleme és a v vektor skaláris szorzata. (Rendelkezésünkre áll $n + 3$ processzor.)

Feladat 7.11 *Adatcsatorna*

Adott egy M hosszúságú sorozat, elemei a k pozitív egésznél nem kisebb egész számok. ($M > k^{10}$). Számítsd ki adatcsatorna alkalmazásával azt a sorozatot, melynek $i.$ eleme a számsorozat $i.$ eleme, n és k értéke által definiált $\binom{n}{k}$ érték. (Rendelkezésünkre áll $n + 3$ processzor.)

Feladat 7.12 *Unióprogram*

Adott egy n dimenziós, egészeket tartalmazó vektor. Oldd meg az alábbi feladatokat: Határozd meg

- \- a vektor 3-mal osztható elemeinek a számát,
- \- a vektor 5-tel osztható elemeinek a számát, valamint
- \- az előző két feladatra kapott megoldás és az unió tétel segítségével állapítsd meg, hogy a vektorban ugyanannyi 3-mal osztható szám van-e mint 5-tel osztható.

Rendelkezésre áll $2 * n + 1$ processzor. Mutasd meg, hogy $O(log(n))$ lépésben megoldható a feladat.