# 2. Ítéletkalkulus szintaxisa

(4.1)

## Az ítéletlogika abc-je: V0

V0 A következő szimbólumokat tartalmazza:

* **ítélet-** vagy **állításváltozók** (az állítások szimbolizálására). Esetenként **logikai változónak** is nevezzük ezeket a változókat.   
  Jelölés: X,Y,Xn...(indexezve is).  
  Az ítéletváltozók halmazát **Vv** jelöli.
* **logikai összekötőjelek**: ¬, **∧**, **∨**, **⊃** vagy a jegyzetben még →, esetleg ↔.
* **elválasztójelek**: ( )

## Az ítéletlogika nyelve: L0

Az ítélet- vagy állítás-logika nyelve a **V0** ábécé feletti legszűkebb olyan tulajdonságú szóhalmaz, amelynek:

1. **Vv** minden eleme egyúttal szava is.
2. ha S eleme a szóhalmaznak, akkor ¬S is eleme.
3. ha S és T eleme a szóhalmaznak, akkor (SοT) is eleme a szóhalmaznak, ahol ο tetszőleges binér logikai összekötőjel.

**Nem minden szó tartozik a nyelvhez!**

**Szintaxis**: A nyelvtanilag helyes mondatok szerkesztési szabályai.

**Szemantika**: A nyelv mondatainak értelmezése.

## Jól formált formula (JFF)

**A Jól formált formulá**t ( JFF ) a következő módon adjuk meg:

* minden ítéletváltozó (Vv) JFF
* ha F JFF, akkor ¬F ( =G ) is JFF
* ha F és G is JFF, akkor ( F○G ) is JFF
* minden JFF formula előáll az első 3 lépés véges sokszori alkalmazásából.

**TÉTEL**: Lo nyelv minden eleme formula.

**TÉTEL**: Nem minden Vo feletti jelsorozat JFF ( ∈Lo ).

**Példa**: Formula-e?

((X**∧**Y)¬Z) Nem

(X(**∧**Y)**⇒**Z) Nem

((Z**⇒**X)**∧**¬X) Igen

**TÉTEL**: Egyértelmű elemzés tétele

Minden formulára pontosan az egyik igaz:

* a formula prímformula ( ítéletváltozó )
* a formula egyértelműen meghatározott Lo-beli formula negátja
* a formula egyértelműen előáll F=A○B alakban, ahol A és B is ∈Lo és egyértelműen meghatározottak.

## Formula analízise

Teljesen zárójelezett formulánál egyértelmű.

### Logikai műveletek prioritása ( precedenciasor )

¬, **∧, ∨,** →, ↔

### Részformula

G részformulája F-nek, ha G fellép F rekurzív felépítése során.

### Közvetlen részformula

1. Egyetlen prímformulának sincs közvetlen részformulája
2. ¬A egyetlen közvetlen részformulája az A formula
3. (A◦B) formula közvetlen részformulái az A és a B formulák

### Logikai összetettség

A formulában található logikai összekötőjelek száma.

### Logikai összekötőjel hatásköre

Azon részformulá(k) közül a legkisebb logikai összetetségű, melye(ke)n az adott műveleteket el kell végezni (az adott művelet is előfordul).

**Példa**: Határozzuk meg aláhúzással az egyes logikai összekötő jelek hatáskörét a fenti definíciók figyelmbe vételével.

((¬A**∨**B)→¬C)↔(D**∧**E)

**I∨Q∧(¬B)→A∨R↔(¬S)**

**¬S↔A∨B∧C∧D→F∨(¬G)**

**Házi feladat:**

**¬A∨(B→¬C)↔(B∧E)**

**¬S∨P→(Q∧¬B)∧P↔¬I**

### Fő logikai összekötőjel

* az a logikai összekötőjel, melynek hatóköre maga a formula
* a formula előállítása során az utolsóként alkalmazott logikai jel.

### Formula fajtája

A fő logikai összekötőjel típusa szerint

* negációs ¬
* konjunkciós **∧**
* diszjunkciós **∨**
* implikációs →
* ekvivalencia ↔

**Példa**:

A→B∨C implikációs

A↔(B∧¬C) ekvivalencia

(A↔B)∧¬C konjunkciós

¬A∨B diszjunkciós

¬(A∨B) negációs

**Házi feladat**: Analizáld a következő formulákat, és állapítsd meg a tipusát!

**A∧B→C↔D**

**¬A∨B∧C**

### Formulaszerkezeti fa

Egy C formula szerkezeti fája olyan véges, rendezett fa, melynek:

* csúcsai formulák
* gyökere C
* ¬A-nak pontosan egy gyermeke van: A
* A○B csúcsnak pontosan 2 gyermeke van: A és B
* levelei prím formulák.

**Példa**: Rajzold fel a formulák szerkezeti fáját!

**1.**

A→B**∨**C

A B**∨**C

B C

**2.**

**¬A∧B↔(C∧¬D)**

**¬A∧B C∧¬D**

¬A B C ¬D

A D

**Házi feladat:**

**¬A∨(B→C)∧¬(D→E)**

**Példa: Lehet-e egyforma** a következő 2 formula szerkezeti fája?

**((A→B)∧¬B)∧¬A (A→B)∧¬B∧¬A**

**(A→B)∧¬B ¬A A→B ¬B∧¬A**

A→B ¬B A A B ¬B ¬A

A B B B A

ekvivalensek, de nem egyformák

### Formulák Zárójelezése

**Példa: Hogyan lehetne zárójelezni** a következő formulát, hogy JFF legyen?

**A→B∧¬B∧¬A**

**(A→B)∧¬B∧¬A konjunkciós**

**(A→B)∧¬(B∧¬A) konjunkciós**

**A→(B∧¬B∧¬A) implikációs**

**A→B∧¬(B∧¬A) implikációs (A→B∧¬B)∧¬A konjunkciós**

**Házi feladat:**

Ábrázold a következő formula szerkezeti fáját! Milyen lesz a formula szerkezeti fája, ha a formulából elhagyjuk a zárójeleket? Hogyan zárójelezhető még a formula? Mi az így kapott formuláknak a fajtája?

**((A→B)∧¬B)∨¬A**

**Felesleges zárójelek törlése:**

¬(A○B) nem hagyható el a zárójel, mert a negáció a legerősebb logikai összekötő jel

(A○B)•(C○D) ha • gyengébb, mint ○, akkor a zárójelek elhagyhatóak

Jobbról balra zárójelezést is figyelembe kell venni.

### Láncformulák

1. konjunkciós formulalánc  
   **A∧(B∧(C∧D))**
2. diszjunkciós formulalánc asszociatívak → jobbról balra zárójelezzük őket,  
   **A∨(B∨(C∨D)) de nem jelentenek mást**
3. kettős implikációs formulalánc  
   A↔(B↔(C↔D))
4. implikációs formulalánc  
   A→(B→(C→D))  
   az implikáció nem asszociatív → jobbról balra zárójelezendő

**Példa**:Rajzold fel a következő formulák szerkezeti fáját, és keresd meg a felesleges zárójeleket!

(A→B)→**(**(B→C)→**(**A→C**))**

A→B (B→C)→(A→C) A megvastagított zárójelek elhagyhatók!

A B B→C A→C

B C A C

Rajzold fel a szerkezeti fát!

A→B→C→D

A B→C→D

B C→D

C D

Mely zárójel (ek ) felesleges ( ek )?

**(A∨B)→((B∧C)→(A→C)) Mindegyik zárójel elhagyható!**

**Házi feladat:**

Rajzold fel a következő formula szerkezeti fáját!

**A∧B∧C∧D**

Mely zárójelek hagyhatók el a következő formulából?

**¬(A∨B)→((B∧C)→¬(A→C))**