# Az elsőrendű logika szintaxisa

## Alapelemek

**Nyelv=abc + szintaxis + szemantika.**

### Abc

Logikai rész:

* + - **¬, ∧, ∨, →, ↔, ∀, ∃**
    - Indivídum változók (X, Y, …)
    - Elválasztó jelek („(„ „)”)
    - (ítélet változók)

Logikán kívüli rész:

* Függvény, predikátum és konstans szimbólumok
* Elemfajták halmaza

**Szintaxis** - jól formált kifejezés előállításának szabályai

### Term - matematikai leképezés szimbolizálása

1. Egy indivíduum változó x jól formált term (jft)

2. Ha f egy n változós függvényszimbólum és t1, t2, ..., tn jft-ek, akkor f(t1, t2, ..., tn) jft.

3. Minden jft az 1., 2 véges sokszori alkalmazásával áll elő.

### Formula - logikai leképezés szimbolizálása

1. . Ha P egy n változós predikátumszimbólum és t1, t2, ..., tn jft-ek, akkor P(t1, t2, ..., tn) **jól formált formula (jff).** (atomi formula, primformula)

2. Ha A, B jff-ák, akkor

(A) jff., (zárójeles)  
¬A, jff. (negációs formula)  
A**∧**B jff., (konjunkciós formula)  
A**∨**B jff., (diszjunkciós formula)  
A→B jff., (implikációs formula)  
A↔B jff. (ekvivalencia formula)

---------------------------------------------------------------------------------0-rendű formulák

3. **∀x**A, **∃**xA jff-ák. (kvantált formula, prim formula)

---------------------------------------------------------------------------------1. rendű formulák

4. Minden jff az 1., 2 és 3 véges sokszori alkalmazásával áll elő.

## Hatáskörök, típusok

### Logikai műveleti jelek hatásköre

A kvantorok **(∀, ∃)** prioritása a legerősebb az összes logikai műveletei jel között.

A **∀, ∃** hatásköre a legszűkebb részformula jobbra.

A hatókörök megállapításánál ezt a szabályt kell figyelembe venni, és az Ítéletkalkulusnál megismert szabályokkal együtt kell alkalmazni.

**Példa**

**∀xP(x)→∃y(Q(x,y)∨P(y)→∀zQ(y,z))**

hatáskör hatáskör

hatáskör

### Változó előfordulás típusa

Egy formulában egy x változó egy előfordulása:

* szabad, ha nem esik x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe
* kötött ha x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik.

**Példa**

A fenti formulában x első előfordulása kötött, második előfordulása viszont szabad. Y mindegyik előfordulása kötött. Z mindegyik előfordulása kötött (egy van).

### Változó minősítése

Egy x változó egy formulában:

* kötött változó ha x minden előfordulása kötött,
* szabad változó ha x minden előfordulása szabad,
* vegyes változó ha x -nek van szabad és kötött előfordulása is.

**Példa**

A fenti példában: x vegyes, y kötött, z kötött

### Formula minősítése

* **Egy formula zárt**, ha minden változója kötött.
* **Egy formula nyitott**, ha legalább egy indivíduum változónak van legalább egy szabad előfordulása.
* **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

**Példa**

A fenti formula nyitott, mert például x-nek van szabad előfordulása.

**Példa**

Határozzuk meg a következő formulákban a kvantorok hatáskörét, a változóelőfordulások típusát, a változó minősítéseket, és a formula minősítéseket.

* ∀**xP(x)**→∃**y(Q(x,y)**∨**P(y)**→∀**zQ(y,z))**
* ∃**x** ∀**y Q(x,y)** →∃**y**∀ **x (P(x)** →¬ **P(z)** →¬ **Q(w,y))**
* ∀**x** ∃v∀**y Q(x,y)** →¬∃**vP(v)** ¬∨ **P(z)**

## Mit értünk matematikai struktúrán. Mi a struktúra típusa.

### Matematikai struktúra

Az **(*U; R; M; C***) négyes ***matematikai struktúra***vagy modell, ahol:

* *U* nem üres halmaz, az értelmezési tartomány, **univerzum** , vagy indivíduumhalmaz**,**
* *R* az *U*-n értelmezett relációk, (alap) **relációk** (logikai függvények/leképezések ***U*n**→{i,h})
* *M* az *U*-n értelmezett műveletek halmaza, (alap)**műveletek** (matematikai függvények/leképezések, ***U*n→*U***)**.**
* *C* pedig *U*-beli elemek halmaza

### A struktúra szignatúrája

A struktúra **szignatúrája** a ν1,ν2,ν3 hármassal jellemezhető, ahol:

* ha R∈ *R* és R: Un→{i,h}, akkor ν1(R)=n
* ha F∈*F* és F: Un→U, akkor ν2(F)=n
* a ν3 megadja *C* elemeinek számát.

### A struktúra típusa

A struktúra típusa- a szignatúra egy másik megadási módja.

A típus megadásának az a módja, hogy az univerzum megadása után az alapműveletek, és az alaprelációk aritásának, majd pedig a konstansoknak a felsorolása történik meg :

**<**U, F1, F2, …, Fk;R1, R2, …, Rn; m1, m2, …, ms; c1, c2, …, cq**>**

## Mi a matematikai logika nyelve

### A leíró nyelv ábécéje (Vv)

A logikai jelkészlet:

* az **indivíduumváltozók**,
* az egyenlőségreláció neve (=),
* a **logikai összekötőjelek** és a
* **kvantorok**
* kiegészítő elemek az **elválasztójelek**.

A nem logikai jelkészlet a relációk, műveletek és a konstansok nevei.

Az Ω = **<**Tp, Kn, Fn, Pr **>** struktúra egy logikai nyelv megadását jelenti, ahol

* Tp: típusok halmaza
* Kn: konstansok halmaza (kitüntetett U-beli elemek)
* Fn: függvényszimbólumok halmaza
* Pr: Predikátum szimbólumok halmaza

(ν1,ν2,ν3): a struktúra szignatúrája

### A matematikai logika nyelve

Vv abc feletti elsőrendű nyelv a matematikai logika nyelve.

Jele: L(Vv)

A matematikai logika nyelve olyan nyelv, mellyel bármely matematikai struktúra

szimbolizálható.

Pl. az elemi aritmetika, ill. a részhalmaz nyelv is matematikai struktúrákat

leíró nyelvek.

### Hogyan lehet egy matematikai struktúrát nyelvként felfogni

**(Könyv: 42.o)**

Az L(Vv) elsőrendű logikai nyelv modellje vagy interpretációja egy általános matematikai struktúra, ha szignatúrájuk megegyezik. Ilyenkor a matematikai struktúra megfelel a logikai nyelvnek.

A formalizált vagy többfajtájú Ω nyelv és a matematikai struktúra ABC-je közötti kapcsolat.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| struktúra | struktúra  ábécé | L mat. log. nyelv  ábécé | jelölés | minőség | összefoglaló jel |
| az U univerzum elemei és a fajták halmaza (k-féle) | individuum változók | individuum változók az egyes fajtákhoz rendelve | xf1,yf1, ...,  ...  xfk,yfk, ..., | logikai | Tp |
| alapműveletek.arg. szám (0,1...) és fajták. | Alapműveletek nevei. | függvény szimbólumok (a konstansok is)  arg. szám (0,1...) és fajták. | f (ti1, ..., tin, tf),  g(tj1, ..., tjn, tg), | logikán | Fn |
| alaprelációk  arg. szám.(1,2...) | alaprelációk nevei | predikátum szimbólumok  arg. szám.(1,2...) és fajták | P (tk1, ..., tkn),  Q(ts1, ..., tsn,), ... | kívüli | Pr |
| egyenlőség reláció | = | az egyenlőség  predikátum | = | logikai |  |

## Néhány matematikai diszciplína (struktúra) leíró (logikai) nyelve.

### Az elemi aritmetika nyelve (Ar nyelv)

1. A matemarikai struktúra:

-Univerzum: N0

- alapreláció: = (kétváltozós)

- műveletek: s(x) (rákövetkezés, egyváltozós), +, \* (összeadás, szorzás)

- szignatúra: v1(=): 2, v2(s): 1, v2(+): 2, v2(\*): 2, v3: 1

2. A struktúrát leíró logikai nyelv: az Ar nyelv

- a nyelv logikán kívüli része: ábécé: (=; s, +, \*; 0),

szignatúra: (2; 1, 2, 2; 1)

- logikai része: individuumváltozók, logikai összekötőjelek, kvantorok, elválasztó-

jelek

**Szintaxisa**: megmondja, hogyan lehet az ábécé segítségével aritmetikai kifejezéseket leírni;

termek

* a 0 konstans
* individuumváltozók,
* és ezekből az alapműveletekkel (függvény szimbólumokkal) felírt további termek

formulák

* atomi formula: két term alaprelációval (predikátum szimbólumokkal) összekapcsolása
* további formulák a logikai összekötőkkel és kvantorokkal írhatók fel

**Szemantikája**

* egy n-változós term egy N0n. → N0 műveletet ír le,
* egy n-változós formula egy N0n →{i,h} logikai fgv-t ír le.

Ezeket az alapműveletek és alaprelációk ismeretében határozhatjuk meg.

**Példa**

Adjuk meg a következő kifejezések közül melyek jólformált termek ill. formulák

* **x =y**
* **s(s(x))**
* **0 \* s(s(0)) + 0**
* **x=y ∧ s(s(0)) =x**
* **∀x(s(s(x) )∧ y=z)**
* **s(s(x))= s(y) =0**
* **x\*y+s(s(y))+**
* **s(s(x)) ∧ y < x**

**Példa:**

**(27. o. –2005.)**

Formalizálni relációkat és műveleteket, amelyek nem szerepelnek mint alaprelációk és alapműveletek.

* **x≥y**
* **x osztója y-nak**
* **x prímszám**
* **x=y+z**

**x≥y =def ∃z(y+z)=x**

**x osztója y-nak =def ∃z(x \*z)=y**

**x prímszám =def x≠0 ∧ x≠s(0) ∧ ∀z(z⏐x →(z=s(0) ∨ z=x))**

**x=y+z =def ∀y(z=s(0)→x= s(y)) ∧ ∀y(x=y+z →s(x)=y+s(z))**

### A Részhalmaz Nyelv

**A Részhalmaz nyelv: <P(H); ⊆; ; >**

**Szignatura: < 2; ; 0 >**

**Példa**

Formalizáljuk a következő relációkat

* **x=y**
* **x≠y**
* **x⊂y**
* **x = y∩z**

**Néhány fontosabb reláció formalizálása**:

**x=y =def x⊆y ∧ y⊆x**

**x≠y =def ¬ x=y**

**x⊂y =def x⊆y ∧ x≠y**

**x = y∩z =def x⊆y ∧ x⊆z ∧ ∀v(v⊆y ∧ v⊆z → v⊆x)**

**Hf**.: D(x,y)= i, ha x, y diszjunkt halmazok

## Prímformula, prímkomponens, szerkezeti fa

### Alapkifejezés (alapterm, alapatom, alapformula):

Kifejezés: termek + formulák

Azokat a kifejezéseket, melyekben nincs indivídumváltozó alapkifejezéseknek nevezzük.

* alapterm: f(t1, ..., tn)
* alapatom: p(t1, ..., tn)
* alapformula: tettszőleges formula, melyben nincs indivídum változó

Nem alapkifejezés például a kvantoros formula, mert ott legalább egy vátozónak kell lenni, amire a kvantor vonatkozik.

### Prímformula, prímkomponens

**Def.:**

Egy 1. rendű formula **primformulái**

* az atomi formulák ( p(t1, ..., tn) ) és a
* kvantált formulák

Egy 1. rendű formula **primkomponensei** a formula azon primformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

**Példa:**

P(X) prímformula, de csak akkor prímkomponens, ha magában szerepel a formulában:

P(X) **∧** Q(X) ben: P(X) prímkomponens is

**∀**xP(x) **∧** Q(X) ben: P(X) nem prímkomponens, csak prímformula

**Példa:**

Határozzuk meg a következő formula prímformuláit és prímkomponenseit. Van-e olyan köztük, amelyik nem esik kvantor hatáskörébe?

* **∀zR(z, g(z)) ∧( Q(g(x)) ∨ ∀xR(x,x))**

Prímformulák: **R(z, g(z)), R(x,x),** **Q(g(x), ∀zR(z, g(z)), ∀xR(x,x)**

Prímkomponensek: **∀zR(z, g(z)), Q(g(x)), ∀ xR(x,x)**

Nem esik kvantor hatáskörébe:

### Term és formula szekezeti fája

(Könyv 116.-117. o.)

**Egy t term szerkezeti fája** egy olyan véges rendezett fa, melynek csúcsai termek

1. gyökere t
2. a f(t1, ..., tn) termet tartalmazó csúcsnak pontosan n gyermeke van, ezek rendre a t1, ..., tn termek
3. levelei pedig változók vagy konstans szimbólumok

**Egy C formula szerkezeti fája** egy olyan véges rendezett fa, melynek csúcsai formulák

gyökere C

1. ¬A csúcsának egy gyermeke van az A formula
2. (A○B) csúcsának két gyermeke van, rendre az A és a B formulák
3. egy QxA csúcsának is egy gyermek van, az A
4. levelei atomi formulák

**Példa:** Határozzuk meg a következő term szerkezeti fáját**.**

f(x,f(c,y))

x f(c,y)

c y

**Példa: Házi feladat**

Határozzuk meg a következő formula szerkezeti fáját.

* **∀x∃yQ(g( f (x), y)) →∃zP(z, z) ∨ ∀x∀yP(x, g(x, y))**
* **∀zR(z, g(z)) ∧( Q(g(x)) ∨ ∀xR(x,x))**

# Az elsőrendű logika szemantikája

**Alapkifejezés (alapterm, alapatom, alapformula):**

Kifejezés: termek + formulák

Azokat a kifejezéseket, melyekben nincs indivídumváltozó alapkifejezéseknek nevezzük.

* alapterm: f(t1, ..., tn)
* alapatom: p(t1, ..., tn)
* alapformula: tettszőleges formula, melyben nincs indivídum változó

Nem alapkifejezés például a kvantoros formula, mert ott legalább egy vátozónak kell lenni, amire a kvantor vonatkozik.

**A σ *L*-értékelés.** Ez egy leképezés, amely egy formulához hozzárendeli annak jelentését.

## Informális definíció.

A formula valamely *L*(P1, P2,..., Pn; f1, f2,..., fk ) formalizált nyelven íródott,   
(ahol ( r1, r2, ..., rn; s1, s2, ..., sk) az *L* nyelv típusa)*.*

**1. lépés**. Választunk egy S= U(R1, R2,..., Rn; o1, o2,..., ok) matematikai struktúrát, amelynek a típusa   
( r1, r2, ..., rn; s1, s2, ..., sk) megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációkkal illetve műveletekkel azonosítjuk: Ri= Piσ , ok=fkσ , ha az interpretáló struktúrának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktúra leíró nyelvét, akkor Piσ =Ri és fkσ = ok. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol Ri és ok.jelentése egyértelmű.

**2. lépés** A nem kötött indivíduum változók értékelése (xsσ) és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

## Formális definíció.

**- Termek**:

**1. xsσ∈U**

**2. (f(t1, t2, ..., tn)) σ = fσ (t1σ, t2σ, ..., tnσ)**

**- Formulák:**

**1. (P(t1, t2, ..., tn)) σ =i, ha (t1σ, t2σ, ..., tnσ)∈Pσ , a Pσ jelöli a Pσ relációigaz halmazát**

**2. (¬A) σ=i, ha Aσ=h (¬A) σ=h, ha Aσ=i  
(A∧B)σ=i, ha Aσ=i és Bσ=i (A∧B)σ=h, ha Aσ=h vagy Bσ=h  
(A∨B)σ=i, ha Aσ=i vagy Bσ=i (A∨B)σ=h, ha Aσ=h és Bσ=h  
(A→B)σ=i, ha Aσ=h vagy Bσ=i (A→B)σ=h, ha Aσ=i és Bσ=h  
(A↔B)σ=i, ha Aσ=Bσ (A↔B)σ=h, ha Aσ≠Bσ**

**3. (∀xA) σ=i, ha Aσ(x/u)=i minden u∈U  
 (∃xA) σ=i, ha Aσ(x/u)=i legalább egy u∈U (A a formula törzse/matrixa)**

**Példa:** logikai nyelv struktúra nyelve

**L= (=, P1, P2 ; a, b, f1, f2) S= N(=, <, > ; 0, 1, +, \* )**

**(2, 2, 2 ; 0, 0, 2, 2 ) (2, 2, 2 ; 0, 0, 2, 2 )**

Term interpretációja:

tσ = (f1(x, f2(x,y))) σ = f1σ (x, f2σ (x,y)) = + ( x, \* (x ,y)) = x+ x\*y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x+ x\*y |
|  | 1 | 1 | 2 |
|  | 2 | 3 | 8 |
|  | 0 | 4 | 0 |

Kvantormentes formula interpretációja

**(P1(t, f1(y, f2(x,y)))) σ= P1σ (tσ, (f1(y, f2(x,y))) σ)= P1σ (tσ, f1σ (y, f2σ (x,y)))=**

**< (+ (x,\* (x,y)),+(y,\*(x,y)) =**

**<( x+ x\*y, y+ x\*y) =**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Egy kvantormentes formula kiértékelése | x | y | (x+ x\*y)<( y+ x\*y) |
| A formula minden alap előfordulását generáljuk | 1 | 1 | h |
| és így minden állítás előáll | 2 | 3 | i |

Egzisztenciális formula interpretálása

(∃x P1(a, f1(x,x))) σ=i, ha (P1(a, f1(x,x))) σ(x/u)=i legalább egy u∈U

ebben az interpretációban, ha 0<(x+x) =i legalább egy u∈N

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nézzük meg az értéktábláját | x | 0**<**(x+x) |
|  | 0 | h |
|  | 1 | i |

Mivel az x=1-re a formula törzse i, ezért a

∃x(0**<**(x+x)) formula is i.

Univerzális formula interpretálása

(∀x P1(a, f1(b,x))) σ= i, ha (P1(a, f1(b,x))) σ(x/u)=i minden u∈U

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nézzük meg az értéktábláját | x | 0<(1+x) |
|  | 0 | i |
|  | 1 | i |

Mivel minden egészre a formula törzse i, ezért a

∀x(0<(1+x)) formula értéke i.

## Egy formula értéktáblája

Egy 1. rendű formula **primformulái**

* az atomi formulák ( p(t1, ..., tn) ) és a
* kvantált formulák

Egy 1. rendű formula **primkomponensei** a formula azon primformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

**Példa:**

P(X) prímformula, de csak akkor prímkomponens, ha magában szerepel a formulában:

P(X) ∧ Q(X) ben: P(X) prímkomponens is

∀xP(x) ∧ Q(X) ben: P(X) nem prímkomponens, csak prímformula

**Az igazságtáblában** (0. rendű logika) az első sorba az állításváltozók (ezek a formula prímkomponensei) és a formula kerülnek. A változók alá igazságértékeiket írjuk. A formula alatt a megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | (Z∧¬X→Y∨¬Z) |
| i | i | i | i |
| i | i | h | i |
| i | h | i | i |

és így tovább

**Egy** 1. rendű formula **értéktáblájában** az első sorba a szabad indivíduum változók, a primkomponensek és a formula kerülnek. Mivel a primformulák több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az indivíduum változók kiértékelése után válnak állításokká. Ezért az értéktábla első sorába még a formulában lévő indivíduum változókat is felsoroljuk a primformulák elé. A indivíduum változók alá azok lehetséges kiértékelései , a primformulák alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a prímformulák értékeinek megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

**Példa**

A formula ∀xP(x)→∃yQ(w,y)∨P(v)→∀zQ(w,z)

A primkomponensek: ∀xP(x), ∃y(Q(w,y), P(v), ∀zQ(w,z)). A szabad indivíduum   
változók v, w.

Legyen az interpretáló struktúra: U={1, 2, 3}, Pσ={1,3}, Qσ={(1,2),(1,3), (2,1), (2,2), 2,3)},

Ekkor (∀xP(x))σ = h, a többiek paraméteres állítások.

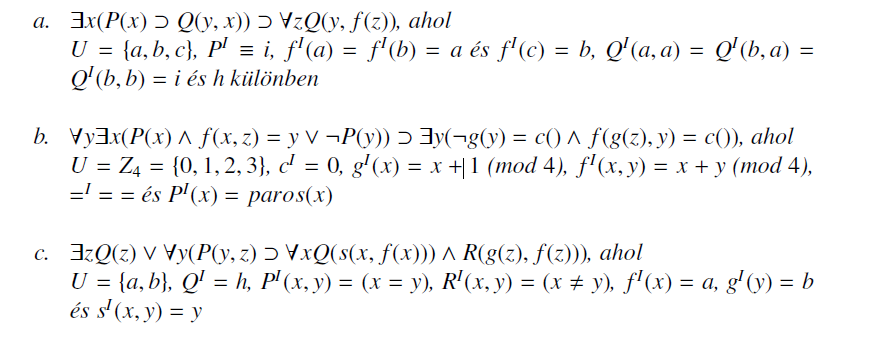
Az értéktábla**:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| v | w | (∀xP(x))σ | (∃y(Q(w,y))σ | P(v)σ | (∀zQ(w,z)))σ | (∀xP(x)→∃yQ(w,y)∨P(v)→∀zQ(w,z)) σ |
| 1 | 1 | h | ∃y(Qσ(1,y))=i | Pσ(1)=i | ∀zQσ(1,z)=h | i mivel a feltételrész hamis |

……...

**Példa:**

Írjuk fel a következő formulák értéktábláját a megadott interpretációban



a). ∃x(P(x) → Q(y, x)) → ∀zQ(y, f (z)), ahol

U = {a; b; c}, Pσ =i, f σI(a) = f σ (b) = a és f σ (c) = b,

Qσ (a; a) = Qσ (b; a) = Qσ (a; a) = i és h különben.

b. ∀y∃x(P(x) ^ f (x, z) = y ∨ ¬P(y)) →∃y(¬g(y) = c() ^ f (g(z), y) = c()), ahol

U = Z4 = f0; 1; 2; 3g, cI = 0, gI(x) = x + 1 (mod 4), f I(x; y) = x + y (mod 4),