**8. GYAKORLAT**

**FUNKCIONÁLISAN TELJES MŰVELET HALMAZOK**

**KKNF ÉS KDNF ELŐÁLLÍTÁSA**

**2.6. Definíció**:

 A logikai összekötőjelek halmazát funkcionálisan teljes művelethalmaznak nevezzük, ha e logikai összekötőjelhalmaz elemeinek és ítéletváltozóinak felhasználásával tetszőleges {i,h}n→{i,h} leképezéshez lehet konstruálni a leképezést leíró jólformált formulát.

Ezek után megmutatjuk, hogy tetszőleges {i,h}n→{i,h} leképezés leírható csak (¬, ˄, ˅) műveleti jeleket tartalmazó jólformált formulával, vagyis hogy a (¬, ˄, ˅) funkcionálisan teljes művelethalmaz.

**2.7. Definíciók**:

1. Literálnak nevezünk egy x prímformulát/ítéletváltozót vagy annak a negáltját, ¬x-et. A literál alapja a prímformula jele.

2. Azonos alapú literálok azok a literálok, amelyek ugyanazt a prímformulát tartalmazzák.

3. Különböző literálok a különböző alapú literálok.

4. Elemi konjukciónak nevezzük különböző literálok konjukcióját.

5. Elemi diszjunkciónak nevezzük különböző literálok diszjunkcióját. Az elemi diszjunkciót klóznak is nevezzük.

6. Teljes elemi konjukciónak nevezzük az olyan elemi konjukciót, amelyben a leképezésben szereplő minden ítéletváltozóból alkotott literálpár valamelyike szerepel.

7. Teljes elemi diszjunkciónak nevezzük az olyan elemi diszjunkciót, amelyben a leképezésben szereplő minden ítéletváltozóból alkotott literálpár valamelyike szerepel.

8. Diszjunktív normálforma (DNF) elemi konjunkciók diszjunkciója.

9. Konjuktív normálforma (KNF) elemi diszjunkciók (vagy klózok) konjunkciója.

10. Kitűntetett diszjunktív normálforma (KDNF) teljes elemi konjunkciók diszjunkciója.

11. Kitűntetett konjuktív normálforma (KKNF) teljes elemi diszjunkciók konjunkciója.

A továbbiakban megadunk két algoritmust, amellyel tetszőleges {i,h}n→{i,h} leképezéshez az azt leíró speciális alakú formula állítható elő. Ezek a kitűntetett diszjunktív normálforma és a kitűntetett konjuktív normálforma. Tekintsük az α={i,h}n→{i,h} leképezés igazságtábláját. Legyenek x1,x2,…,xn az igazságtáblán szereplő ítéletváltozók.

**2.3.1.1. Kitüntetett diszjunktív normálforma előállítása**

1. Válasszuk ki az igazságtábla azon sorait ahol α=i. Minden ilyen sorhoz rendeljünk hozzá egy x’1˄x’2˄…˄x’n=ks teljes elemi konjunkciót úgy, hogy az x’i literál xi vagy ¬xi legyen aszerint, hogy ebben a sorban x’1 oszlopában i vagy h áll.
2. Az így kapott teljes elemi konjunkciók diszjunkciója ki1˅ki2˅…˅kiα az α leképezést leró kitűntetett diszjunktív normálforma.

Vegyük észre, hogy ks csak az igazságtábla hozzátartozó sorának megfelelő igazságértékelésre igaz, és így a ki1˅ki2˅…˅kiα formula pontosan az i1,i2,…,iα igazságkiértékelések mellett igaz.

**2.2. Példa. Kitűntetett diszjunktív normálforma előállítása**

az igazságtábla az elemi konjunkciók

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | α |  |  |
| h | h | h | i | \*\*\*\* | (¬x˄¬y˄¬z) |
| h | h | i | h |  |  |
| h | i | h | i | \*\*\*\* | (¬x˄y˄¬z) |
| h | i | i | i | \*\*\*\* | (¬x˄y˄z) |
| i | h | h | i | \*\*\*\* | (x˄¬y˄¬z) |
| i | h | i | h |  |  |
| i | i | h | i | \*\*\*\* | (x˄y˄¬z) |
| i | i | i | h |  |  |

A fenti α leképezést leíró kitűntetett diszjunktív normálforma

(¬x˄¬y˄¬z)˅ (¬x˄y˄¬z)˅ (¬x˄y˄z)˅ (x˄¬y˄¬z)˅ (x˄y˄¬z) (=α)

***2.3.1.2. Kitűntetett konjunktív normálforma előállítása***

1. Válasszuk ki az igazságtábla azon sorait, ahol α =h. Minden ilyen sorhoz rendeljünk hozzá egy x1’˅x2’’˅…˅xn’’=dt teljes elemi diszjunkciót úgy, hogy az x1’’ literál xi vagy ¬xi legyen aszerint, hogy ebben a sorban xi oszlopában h vagy i áll.
2. Az így kapott teljes elemi diszjunkciók konjunkciója di1˄di2˄…˄diα az alfa leképezést leíró kitűntetett konjunktív normálforma.

Vegyük észre, hogy dt csak az igazságtábla hozzátartozó sorának megfelelő igazságértékelésre hamis, és így a di1˄di2˄…˄diα formula pontosan az i1,i2,…,iα igazságértékelések mellett hamis.

***2.3.Példa. Kitűntetett konjunktív normálforma előállítása***.

az igazságtáblája az elemi diszjunkciók

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | α |  |  |
| h | h | h | i |  |  |
| h | h | i | h | \*\*\*\* | (x˅y˅¬z) |
| h | i | h | i |  |  |
| h | i | i | i |  |  |
| i | h | h | i |  |  |
| i | h | i | h | \*\*\*\* | (¬x˅y˅¬z) |
| i | i | h | i |  |  |
| i | i | i | h | \*\*\*\* | (¬x˅¬y˅¬z) |

A fenti α leképezést leíró kitűntetett konjunktív normálforma

(x˅y˅¬z)˄ (¬x˅y˅¬z)˄ (¬x˅¬y˅¬z) (=α)

**2.3.1.3. *A normálforma egyszerűsítése***

Legyen k egy elemi konjunkció és x egy ítéletváltozó, ekkor a k1=k˄x, k2=k˄¬x konjunkciókra a (k˄x)˅(k˄¬x)=k˄(x˅¬x)=k˄(i)=k egyszerűsítési szabály alkalmazható. Ezt az egyszerűsítési szabályt alkalmazzuk a kitűntetett diszjunktív normálformák egyszerűsítésére. Az egyszerűsítési szabály alkalmazásával a k˄x, k˄¬x kunjunkciópárt a k konjunkcióval helyettesítjük, és így a formulában szereplő konjunkciók száma is csökken. Az egyszerűsítések során a KDNF-ből egy DNF áll elő. A duális egyszerűsítési szabály hasonló módon alkalmas a kitűntetett konjunktív normálformák egyszerűsítésére, ahol k elemi diszjunkció, x ítéletváltozó és az egyszerűsítési szabály (k˅x)˄(k˅¬x)=k˅(x˄¬x)=k˅(h)=k.

Az alábbiakban megadunk egy algoritmust KDNF-ek egyszerűsítésére.

1. Felírjuk a KDNF-ben szereplő összes elemi konjunkciót.
2. Megvizsgáljuk a konjunkciólistában szereplő összes lehetséges elemi konjunkciópárt, hogy alkalmazható-e rájuk a (k˄x)˅(k˄¬x)=k egyszerűsítés. Ha igen, akkor a két kiválasztott konjunkciót #-al megjelöljük, és az eredmény konjunkciót beírjuk egy új konjunkciólistába. Azok az elemi konjunkciók, amelyek az eljárás végén nem lesznek megjelölve, nem voltak egyszerűsíthetők, tehát belekerülnek az egyszerűsített diszjunktív normálformába.
3. Ha az új konjunkciólista nem üres, akkor megvizsgáljuk, hogy van-e olyan konjunkciópár, amelyekre a k˅k=k összefüggés alkalmazható. A lehetséges összevonások után kapott új konjunkciólista átveszi a konjunkciólista szerepét és a 2. lépés következik.
4. Az eljárás befejeződik, és az algoritmus során kapott, de meg nem jelölt elemi konjunkciókat a ˅ művelettel összekapcsoló formula az eredeti KDNF-el egyenértékű egyszerűsített DNF.

Megjegyzés: A fenti eljárás a klasszikus McCluskey-féle algoritmus. Az eredmény DNF konjunkcióban lévő literálok száma minimális. Az ilyen formulákat redukált DNF-nek nevezik. A bennük szereplő konjunkciók neve pedig prímimplikáns.

Megjegyzés: A DNF-ek egyszerűsítési algoritmusainak kutatása az 50-70-es évekre tehető. Ez volt az az időszak, amikor az elektronikus berendezések tervezése korábban funkcionális (˄, ˅, ¬, ¬˄, ¬˅ funkciókat realizáló) elemek alapján, később a programozható logikai mátrixok (PLA), valamint memóriaelemek felhasználásával történt. Két összefoglaló mű a témában [Ara-85, Bra-84].

**2.4.Példa: A 2.2. példabeli KDNF egyszerűsítése.**

A konjunkciólista:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | ¬x˄¬y˄¬z | # |  |
| 2. | ¬x˄y˄¬z | # |  |
| 3. | ¬x˄y˄z | # | Minden konjunkció egyszerűsítve lett. |
| 4. | x˄¬y˄¬z | # |  |
| 5. | x˄y˄¬z | # |  |

Az első egyszerűsítés eredménye

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | ¬x˄¬z (1,2) | # |  |
| 2. | ¬y˄¬z (1,4) | # |  |
| 3. | ¬x˄y (2,3) | ------ | Bekerül a DNF-be |
| 4. | y˄¬z (2,5) | # |  |
| 5. | x˄¬z (4,5) | # |  |

A második egyszerűsítés eredménye

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | ¬z | (1,5) |  |
|  |  |  | ----összevonhatók |
| 2. | ¬z | (2,4) |  |

Az eredmény: ¬z ˅ (¬x˄y).

Egyszerűen belátható, hogy ha egy leképezés tautológia, akkor McCluskey algoritmus eredménye az üres konjunkció vagy tele klóz (jele ▪).

2.5. Példa. tautológia KDNF-jének egyszerűsítésére. Legyen az ítéletváltozók száma 3.

az igazságtábla az elemi konjunkciók

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X | y | z | α |  |
| 1. | H | h | h | i | (¬x˄¬y˄¬z) |
| 2. | H | h | i | i | (¬x˄¬y˄z) |
| 3. | H | i | h | i | (¬x˄y˄¬z) |
| 4. | H | i | i | i | (¬x˄y˄z) |
| 5. | I | h | h | i | (x˄¬y˄¬z) |
| 6. | I | h | i | i | (x˄¬y˄z) |
| 7. | I | i | h | i | (x˄y˄¬z) |
| 8. | I | i | i | i | (x˄y˄z) |

Az algoritmus 2. lépésének első alkalmazásával kapott új konjunkciólista.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | (¬y˄¬z) | (1,5-ből) |
| 2. | (¬y˄z) | (2,6-ból) |
| 3. | (y˄¬z) | (3,7-ből) |
| 4. | (y˄z) | (4,8-ból) |

Az algoritmus 2. lépésének második alkalmazásával új konjunkciólista.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | (¬z) | (1,3-ból) |
| 2. | (z) | (2,4-ből) |

Az algoritmus 2. lépésének harmadik alkalmazásával új konjunkciólista.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | ▪ | (1,2-ből) |

A dualitás miatt egy azonosan hamis leképezés KKNF-ját hasonlóan egyszerűsítve az üres klózt (▫) kapjuk meg.

Házi Feladatok:

1. Írja fel a KDNF-jét és a KKNF-jét azoknak az {i,h}3→{i,h} leképezésnek, ahol igaz az érték, ha az ítéletváltozók közül

a, legfeljebb kettő igaz

b, legfeljebb kettő hamis

c, az első kettő együttesen akár igaz, akár hamis

d, az utolsó hamis

1. Egyszerűsítse az 1. feladat formuláit.

2.3.2.További funkcionálisan teljes művelethalmazok

Mivel a (¬, ˄, ˅) művelethalmaz funkcionálisan teljes, ezért funkcionálisan teljes minden olyan művelethalmaz is, ahol az (¬, ˄, ˅) műveletek által meghatározott leképezések leírhatók hozzájuk tartozó műveleteket és ítéletváltozókat tartalmazó formulákkal.

Ennek megfelelően funkcionálisan teljes művelethalmazok

1. (¬, ˄), mivel x˅y= ¬(¬x˄¬y)
2. (¬, ˅), mivel x˄y= ¬(¬x˅¬y)
3. (¬, →), mivel x˅y= ¬x→y és x˄y=¬(x→¬y)
4. (¬, ˄, ˅, →, ↔), mivel tartalmaz funkcionálisan teljes művelethalmazt.

Ahhoz, hogy az ítéletkalkulusban lehetséges leképezések formulával leírhatóak legyenek, elegendő, ha egy funkcionálisan teljes művelethalmaz elemeit tartalmazza a nyelv. Ez azt jelenti, hogy bármely összetett állítás leírható bármely funkcionálisan teljes logikai összekötőjelhalmaz segítségével felírt formulákkal. Lehet, hogy

Feladatok:

1. Írja át a következő formulákat olyan formulákká, amelyekben csak a ¬ és a → műveletek fordulnak elő.

a, (A˄B)˅¬C˅(¬A˄C)

b, (A˄B˄C)˅(¬A˄¬C˄¬B)

c, ¬(A˄B)˅¬C˅A

d, ¬(A˄B)˄¬C˄¬A

2.1.Tétel: Legyen F={B1, B2,…,Bn} egy formulahalmaz. A {B1, B2, … , Bn} |=0B akkor és csak akkor, ha {B1, B2, … , Bn-1} |=0Bn→B (Dedukciós tétel)

2.2.Tétel: Legyen F={B1, B2, … , Bn} egy formulahalmaz. A

(1) {B1, B2, … , Bn} |=0B akkor és csak akkor, ha

(2) |=0 B1→B2→ … →Bn-1→Bn→B. (Eldöntés probléma)

 (3) {B1,B2, ..Bn,B} kielégíthetetlen

 {*KNF*(B1), *KNF*(B2), .*. KNF*(Bn), *KNF*(B)} kielégíthetetlen

 A formula halmazban szerelő klózok (diszjunkciók) kielégíthetetlenek

2.9.Definíció: Döntési eljárásnak nevezünk egy algoritmust, ha a bemenő adatokon elvégezve az algoritmusban rögzített műveleteket, kétféle, egymást kizáró, eredmény lehetséges. Ezek a problémában felvetett kérdésre való igen vagy nem választ jelentik.

2.10.Definíció: Tegyük fel, hogy egy adott probléma megoldására létezik döntési eljárás. E problémát megoldó kalkulus egy olyan döntési eljárás, amely az eredeti döntési eljárástól eltérő módon oldja meg az adott problémát vagy a probléma átfogalmazásával nyert feladatot, és a kapható két eredmény megfeleltethető az eredeti problémára adható igen vagy nem válasznak. Egy kalkulus helyes (sound), ha az algoritmus igennek minősített válasza esetén az eredeti problémára is igen a válasz. Egy kalkulus teljes (complete), ha minden olyan esetben, amikor az eredeti problémára igen a válasz, az algoritmus is ad választ, és az a helyesség miatt igen.

A 2.3 pontban bemutatott eredmények kétféle lehetőséget nyújtanak annak eldöntésére, hogy egy C formula tautológia-e, vagyis az eldöntésprobléma megoldására.

Az első, a C formula igazságtáblájának végignézése annak megállapítására, hogy a C igaz-e minden interpretációban, vagyis hogy a C formula tautológia-e a szemantika értelmében. Ezért ez a döntési eljárás az alapeljárás. Ez a

1. Az algoritmus adata a C formula egy DNF-ja, az algoritmus pedig a 2.3-ban bemutatott egyszerűsítés elvégzése. Ha az eredmény a ▪ (az üres konjunkció) lesz, akkor a C formula tautológia.
2. Ha egy C formula tautológia, akkor a ¬C formula azonosan hamis. Ez azt jelenti, hogy az eldöntésproblémával ekvivalens egy formula azonosan hamis voltának vagy más szóval kielégíthetetlenségének eldöntése. Ezért az algoritmus adata a ¬C formula egy KNF-ja, az algoritmus pedig a 2.3-ban bemutatott egyszerűsítés elvégzése. Ha az algoritmus eredménye az ▫ (az üres klóz), akkor a C formula tautológia.

Megjegyzés: Mivel az egyszerűsítési szabályok azonosságok, könnyű belátni, hogy az A és a B kalkulus helyes és teljes.

 Az A és a B kalkulus gyakorlati jelentősége nem nagy, mivel majdnem olyan nehezek, mint az igazságtábla végignézése. Ismertek a gyakorlatban jobban használható kalkulusok. Ezek közül a 2.6. pontban tárgyaljuk a rezolúciós kalkulust.

**REZOLÚCIÓS ELV**

Tehát, ha be akarjuk látni, hogy {B1, B2, … , Bn} |=0B akkor felírjuk a Bi-k és a ¬B konjunktív normálformáit, és előállítjuk a bennük szereplő klózok ***K***=(C1, C2, … , CM) klózhalmazát. Ha a K klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor a B1, B2, … , Bn feltételek teljesülése esetén a B tétel fennáll.

**2.6.2. Következtetések rezolúciós kalkulussal**

 A továbbiakban a nulladrendű rezolúciós elvet, vagy rezolúciós kalkulust tárgyaljuk. Ez egy döntési eljárás, amelynek segítségével eldönthető a klózhalmazok kielégíthetetlensége. Mint tudjuk, az elsöntésprobléma megoldása valamely döntési eljárással azt jelenti, hogy a tétel ismeretében, vagyis visszakövetkeztetéssel bizonyítjuk be a tételt. Ennek megfelelően a rezolúciós elv is visszakövetkeztetéssel oldja meg a tételbizonyítást.

Megmutatjuk, hogy a rezolúciós elv segítségével az előrekövetkeztetés is lehetséges.

2.16.Definíciók:

- C1 és C2 klózok rezolvense létezik, ha bennük pontosan egy olyan azonos alapú literál van, amelyek egymás negáltjai. Tehát C1=C1’ ˅ L1 , C2=C2’ ˅ L2 és L1=¬L2. A C1, C2 rezolvense a C=C1’ ˅C2’ klóz.

- qn-nek a *K*-klózhalmazból való rezolúciós levezetése a q1,q2,…,qn klózsorozat, ha qi$\in $K, vagy qi a qj, qt rezolvense (j, t<i).

-A *K* klózhalmaznak van rezlúciós cáfolata, ha rezolúciós levezetéssel levezethető belőle az

üres klóz (▫).

2.15.Példa. Néhány példa klózpárokra, amelyeknek van, illetve, amelyeken nincs rezolvensük.

klózpár rezolvens

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) | A˅¬B, B˅¬C | A˅¬C |
| b) | A˅¬B, ¬B˅¬C | nincs, a közös literál azonosan negált |
| c) | A˅¬B, D˅¬C | nincs, mivel nincs közös literál |
| d) | ¬A˅¬B, A˅B˅¬C | nincs, mivel egynél több literál tér el negáltságát tekintve |
| e) | ¬B, B | ▫, az üres klóz |

2.6.Tétel: A K klózhalmazból levezethető az üres klóz, akkor és csak akkor, ha *K* kielégíthetetlen. (Rezolúciós elv helyessége és teljessége)

A rezolúciós levezetés megszerkesztésére több algoritmus/stratégia ismeretes. Ezek a klózhalmaz szemantikus fája alapján sok esetben előállíthatók. Ezt támasztja alá a következő megállapítás.

2.17.Definíció: Egy *K* klózhalmaz levezetési fája egy olyan bináris fa, amely a rezolúciós levezetés lépéseit mutatja. A fa leveleihez a *K*-beli klózokat, a belső csúcsaihoz a megfelelő rezolvenseket rendeljük. Az élek címkéi a rezolválásban résztvevő, a klóz illesztésének megfelelő literálok (2.4. ábra).

2.18. Definíció: Egy *K* klózhalmazból való lineáris rezolúciós levezetés egy q1, r1, q2, r2, … , qn klózsorozat, ha a qi a qi-1 és az ri-1 rezolvense. A qi klózókat centrális vagy központi klózoknak, az ri klózokat pedig mellék klózoknak nevezik. Lásd 2.6. ábra. Egy *K* klózhalmazból való lineáris input rezolúciós levezetés egy q1, r1, q2, r2, … , qn klózsorozat, ha a lineáris rezolúciós levezetés, és minden j-re rj$\in $*K*. Lásd 2.7. ábra.

 A lineáris rezolúció jól áttekinthető, helyes és teljes kalkulus. A lineáris input rezolúció helyes, de nem teljes kalkulus, mivel van olyan kielégíthetetlen klózhalmaz amelyből lineáris input rezolúcióval nem vezethető le az nem üres klóz.

2.19.Definíció: Egy klózt Horn-klóznak nevezünk, ha legfeljebb egy nem negált literált tartalmaz.

Horn- klózok: ¬A˅¬B˅¬C, ¬A˅B˅¬C, A, ¬A.

Nem Horn- klózok: A˅B˅C, A˅B˅¬C.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

2.7.Tétel: Ha egy kielégíthetetlen *K* klózhalmaz csak Horn-klózokat tartalmaz, akkor a *K* klózhalmazból lineáris input rezolúcióval is levezethető az üres klóz.



2.6. ábra. Lineáris rezolúció levezetési fája.

K={B˅¬C, A˅C, ¬A˅¬B, ¬A˅C, ¬C}



2.7. ábra. Lineáris input rezolúció levezetési fája

K={B˅¬C, A˅C, ¬A˅¬B, ¬A˅C, ¬C}

 A rezolúciós kalkulus alkalmas előrekövetkeztetésre mivel, a 2.4. tétel miatt C1˄C2→C. Ez azt jelenti, hogy a feltételformulák konjunkciójának KNF-jében szereplő klózokból álló *K’* klózhalmazból előállított rezolúciós levezetésekben szereplő C rezolvensekre *K’* |=0C.

 A 2.8/b példát tekintve *K*={¬F˅K, ¬K˅A, F˅R, ¬R˅¬H˅A, ¬A} egy rezolúciós levezetés *K*-ból:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | ¬F˅K | $$\in K$$ |
| 2. | ¬K˅A | $$\in K$$ |
| 3. | A˅¬F | rez(1,2) |
| 4. | F˅R | $$\in K$$ |
| 5. | A˅R | rez(3,4) |
| 6. | ¬A | $$\in K$$ |
| 7. | R | rez(5,6) |
| 8. | ¬R˅¬H˅A | $$\in K$$ |
| 9. | ¬H˅A | rez(7,8) |
| 10. | ¬H | rez(6,9) |
| 11. | ¬F | rez(3,6) |
| 12. | ¬K | rez(2,6) |

A kapott rezolvensek mind tautologikus következményei K-nak.

Házi Feladatok:

1. Tekintsük a következő klózhalmazokat

K1={¬Q, P˅Q, ¬P˅R}

K2={¬A˅B, ¬B˅C, A˅D, ¬D˅¬E˅C, ¬C}

K3={¬Q˅P˅R, P˅Q, ¬P˅R, ¬R}

1. Szerkesszen rezolúciós levezetéseket a fenti klózhalmazok alapján. Döntse el, hogy mely esetekben vezethető le az ▫.
2. Adja meg a levezetési fákat.