**PRENEX ALAKRA HOZÁS**

**3.6. Definíció**: Egy B=Q1x1Q2x2…QsxsA formulát **prenex formulának** nevezünk, ha az A formula kvantormentes. A formula Q1x1Q2x2…Qsxs részét a formula **prefixumának**, az A részét a formula **magjának vagy mátrixának** nevezik. **Prenex-konjunktív normálformájú** illetve **prenex-diszjunktív normálformájú** egy prenex formula, ha a magja KNF illetve DNF.

 Megmutatjuk, hogy tetszőleges elsőrendű formula átalakítható prenex formulává. Ehhez megadunk néhány, a kvantorokra vonatkozó azonosságot, majd egy algoritmust, amely biztosítja tetszőleges formula prenex formulává alakítását az említett azonos átalakítások felhasználásával.

Általános De Morgan – szabályok:

1. ¬$∀$xA=$∃$x¬A

2. ¬$∃$xA=$∀$x¬A

Kvantorkiemelési szabályok, A[x] jelentése, x szerepel A-ban

1. $∀$xA[x]˄B=$∀$x(A[x]˄B), 2. $∀$xA[x]˅B=$∀$x(A[x]˅B)

3. $∃$xA[x]˄B=$∃$x(A[x]˄B), 4. $∃$xA[x]˅B=$∃$x(A[x]˅B)

5. $∀$xA[x]˄$ ∀$xB[x]=$ ∀$x(A[x]˄B[x]), a ˅ műveletre nem áll fenn.

6. $∃$xA[x]˅$ ∃$xB[x]=$ ∃$x(A[x]˅B[x]), az ˄ műveletre nem áll fenn.

7. Q1xA[x]˄Q2xB[x]=Q1xQ2y(A[x]˄B[x/y]) y nem szerepelt

8. Q1xA[x]˅Q2xB[x]=Q1xQ2y(A[x]˅B[x/y]) a formulában

**Algoritmus** tetszőleges formula *prenex* alakra való átírására

1. A formulában szereplő logikai összekötőjelek átírása ¬, ˄, ˅ logikai műveletekre.
2. A De Morgan- és az általános De Morgan- szabályok alkalmazása addig, amíg a ¬ hatásköre minden esetben atomi formula nem lesz.
3. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg az össze kvantor a formula elé nem kerül.

**3.3.Példa.**

a, A $∀$x($∀$yP(x,y)˄$ ∃$y¬(Q(y)→P(x,a)))→¬$ ∀$x$∃$y(P(y,x)→R(x,y)) formula átírása prenex alakba.

1. Logikai összekötőjelek átírása.
2. 2. A De Morgan – szabályok alkalmazása.

$∃$x¬($∀$yP(x,y)˄$ ∃$y¬(Q(y)˅P(x,a)))˅$∃ $x$∃$y(¬P(y,x)˅R(x,y))

$∃$x(¬$∀$yP(x,y)˅¬$ ∃$y¬(Q(y)˅P(x,a)))˅$∃x∀$y¬(¬P(y,x)˅R(x,y))

$∃$x($∃$y¬P(x,y)˅$ ∀$y¬¬(¬Q(y)˅P(x,a)))˅$∃$x$∀$y(P(y,x)˄¬R(x,y))

$∃$x($∃$y¬P(x,y)˅$ ∀$y(¬Q(y)˅P(x,a)))˅$∃$x$∀$y(P(y,x)˄¬R(x,y))

1. 3. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása.

Kiemeljük a $∃$x kvantort. (6. szabály)

$∃$x($∃$y¬P(x,y)˅$ ∀$y(¬Q(y)˅P(x,a))˅$∀$y(P(y,x)˄¬R(x,y)))

A formula **……**-val és **-.-.-.-.-**val aláhúzott részeiben rendre az y/y1 és az y/y2 helyettesítést elvégezve a kapott formula

$∃$x($∃$y¬P(x,y)˅$∀$y1(¬Q(y1)˅P(x,a))˅$ ∀$y2(P(y2,x)˄¬R(x,y2)))

Most már mindegyik kvantor kiemelhető. Az eredmény:

$∃$x$∃$y$∀$y1$∀$y2(¬P(x,y)˅(¬Q(y1)˅P(x,a))˅(P(y2,x)˄¬R(x,y2)))

Ezután a formula mátrixa átírható KNF-be illetve DNF-be, ha az a további feldolgozás szempontjából célszerű.

**Példa: Könyv 246. o 6. pont**

**KVANTÁLT FORMULÁK KIFEJTÉSE**

Mint azt a logikai függvénykalkulus szemantikájának megadásánál láttuk, ($∀$xA)σ=i, ha Aσ(x/u)=i, az U univerzum minden u elemére és ($∃$xA)σ=i, ha Aσ(x/u)=i, az U univerzum legalább egy u elemére. Legyen az interpretáló struktúra univerzuma U={a, b, c}.

 Legyen a kiértékelendő formula $∀$xP(x). Ekkor a ($∀$xP(x))σ=Pσ(a)˄Pσ(b)˄Pσ(c) fenáll, hiszen a konjunkciós formula csak akkor igaz, ha minden komponense igaz, összhangban azzal, hogy egy univerzális formula csak akkor igaz, ha a kvantált formula x szerinti minden kiértékeltje igaz a struktúrában.

 Legyen a kiértékelendő formula $∃$xP(x). Ekkor a ($∃$xP(x))σ=Pσ(a)˅Pσ(b)˅Pσ(c) fennáll, hiszen a diszjunkciós formula csak akkor igaz, ha legalább egy komponense igaz, összhangban azzal, hogy egy egzisztenciális formula csak akkor igaz, ha a kvantált formula x szerinti kiértékeltjei közül legalább egy igaz a struktúrában.

 Ha egy formula univerzális vagy egzisztenciális formula, vagyis ha a kvantor hatásköre a teljes formula, akkor a fenti kifejtés bármely véges univerzumú struktúrában elvégezhető. Ha több kvantor áll a formula előtt és az egyes kvantorok hatásköre az utána következő teljes formula, akkor e kvantorok szerint a formula, a kvantorok sorrendjében kifejthető. Jelölje Qi az i-edik kvantort, ami egyaránt lehet $∀$ az vagy az $∃$, és legyen a formula B= Q1x1Q2x2…QsxsA és a struktúra univerzuma n elemű. A formulát először kifejtjük a Q1 kvantor szerint, ahol az ˄ (ha Q1=$∀$) vagy a ˅ (ha Q1=$∃$) köti össze a Q2x2…QsxsAσ(x1/ui) alakú formulákat, ahol i=1,2,…,n. Ezután minden komponens formulát kifejtünk a Q2 szerint, vagyis a kifejtésben i-edik komponens formulában Q2=$∀$ esetén az ˄, illetve Q2=$∃$ esetén a ˅ köti össze a Q3x3…QsxsAσ(x1/ui)(x2/uj) alakú formulákat, ahol j=1,2,…,n. Ez az eljárás a komponens formulákkal s lépésen át folytatódik. Ha az A formula nem tartalmaz kvantort, akkor minden komponens formula alapformula, tehát az igazságértéke ismert. Ha az A formulában vannak kvantált részformulák, akkor azokat is ki kell fejteni minden egyes komponens formulán belül. Egy formula kifejtése akkor egyszerű, ha minden kvantor a formula elején van.

b) A $∀$x$∀$y((P(x,y)→¬P(y,x))˄$ ∃$z(P(x,z)˅P(z,y))) formula kifejtése és kielégíthetőségének vizsgálata az {a,b}, kételemű univerzummal rendelkező struktúrában. (A példa Kalmár Lászlótól származik. [Kal-71])

1. Kifejtés $∀$x szerint.

$∀$y((P(a,y)→¬P(y,a))˄$∃$z(P(a,z)˅P(z,y))) ˄

$∀$y((P(b,y)→¬P(y,b))˄$∃$z(P(b,z)˅P(z,y)))

2. Kifejtés $∀$y szerint.

{[((P(a,a)→¬P(a,a))˄$∃$z(P(a,z)˅P(z,a))) ˄

((P(a,b)→¬P(b,a))˄$∃$z(P(a,z)˅P(z,b)))] ˄

[((P(b,a)→¬P(a,b))˄$∃$z(P(b,z)˅P(z,a))) ˄

((P(b,b)→¬P(b,b))˄$∃$z(P(b,z)˅P(z,b)))]}

3. Kifejtés $∃$z szerint.

{[((P(a,a)→¬P(a,a))˄(P(a,a)˅P(a,a)˅P(a,b)˅P(b,a))) ˄

((P(a,b)→¬P(b,a))˄(P(a,a)˅P(a,b)˅P(a,b)˅P(b,b)))] ˄

[((P(b,a)→¬P(a,b))˄(P(b,a)˅P(a,a)˅P(b,b)˅P(b,a))) ˄

((P(b,b)→¬P(b,b))˄$∃$z(P(b,z)˅P(z,b)))]}

**SKOLEM ALAKRA HOZÁS**

**3.8.Definíció**: Egy prenex formulát **Skolem – formulának** nevezünk, ha a prefixumában csak univerzális kvantorok szerepelnek és a formula magja konjunktív normálformájú.

**Megjegyzés**: Egy olyan prenex formulához amelyben Qj a legkisebb indexű egzisztenciális kvantor, vagyis a formula alakja $∀$x1...$∀$xj-1$∃$xjQj+1xj+1…QnxnA=$∀$x1…$∀$xj-1$∃$xjB, konstruálhatunk egy olyan f(x1,x2,…,xj-1) függvényt, amely az interpretáló struktúrában az (x1,x2,…,xj-1) változók által felvett minden értékkombinációhoz hozzárendel egy értéket azok közül, amelyeket az xj helyébe helyettesítve a B igaz lesz. Ezt a függvényt **Skolem függvénynek** nevezzük.

 Megadunk egy algoritmust, amellyel tetszőleges prenex formulához meg lehet konstruálni egy vele logikailag ekvivalens Skolem-formulát.

**Algoritmus** Skolem-formula előállítására. A prenex formula legyen Q1x1Q2x2…QsxsA.

1. Megkeressük az első egzisztenciális kvantort. Ha ilyen nincs, akkor a formula Skolem-formula. Az algoritmus befejeződik.
2. Legyen az első egzisztenciális kvantor az j-edik. Válasszunk egy olyan f függvényszimbólumot, amely nem szerepel a nyelvben és jelöljük f(x1,x2,…,xj-1)-el a Skolem függvényt. Az új formulát úgy kapjuk meg, hogy elhagyjuk a xj kvantort és a B-ben elvégezzük az (xj/f(x1,x2,…,xj-1)) helyettesítést. A kapott formulával következik az 1. lépés.

**3.6.Tétel**: Legyen B prenex formula és BSN a B alapján előállított Skolem-formula. A B formula logikailag ekvivalens a BSN formulával.

A Skolem-formulát előállító algoritmus során kapott Skolem függvényeket jelölő szimbólumok nem tartoznak a Skolem-formulát leíró nyelvhez. Ez azt jelenti, hogy az interpretáló struktúrában nincs megfelelőjük az alapműveletek között. Definíciója miatt a Skolem függvény olyan leképezés jelent, amely a formula kielégíthetősége esetén a formulát igazzá tévő értéket állít elő. A Skolem függvényt az egyes struktúrában definiálni kell. Ez jelentheti a leképezés értéktáblázattal való leírását. Ha egy struktúrában van az f(x1,x2,…,xj-1) Skolem függvényt leíró term, akkor azt mondjuk, hogy a Skolem függvény kiszámítható az illető struktúrában.

 Kövessük végig egy példán a prenex formába és a Skolem-formába való átírást.

**3.4.Példa**. A formula:

$∀$x$∀$y$∃$z((P(x,y)→¬P(y,x))˄(P(x,z)˅P(z,y))) – átírás ¬, ˄, ˅-ra

$∀$x$∀$y$∃$z((¬P(x,y)˅¬P(y,x))˄(P(x,z)˅P(z,y))) – prenex-konjunktív forma Skolem-formába való átírása.

z-re Skolem függvény bevezetése:

$∀$x$∀$y((¬P(x,y)˅¬P(y,x) , P(x,f(x,y))˅P(f(x,y),y)))

A kapott elsőrendű klózhalmaz:

K={¬P(x,y)˅¬P(y,x) , P(x,f(x,y))˅P(f(x,y),y)}

**Példa: Könyv 248. o 6.3.33. példa**

****

****

****